Equazioni e disequazioni logaritmiche

esercizi svolti e ordinati per competenze

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alle equazioni e disequazioni logaritmiche, quali si studiano attualmente al liceo scientifico; sono pensati come sintesi per un ripasso, soprattutto per gli alunni più in difficoltà. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso. Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

Questo file e documento viene concesso con licenza Creative Commons. CC BY-NC-ND.

- Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
- Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
- Non puoi alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Benedetta Olla, Federico Belvisi.

2 Funzioni logaritmiche

Il logaritmo in base a di un numero x è l'esponente a cui si deve elevare la base per ottenere tale numero.

Una funzione logaritmica con base a e esponente x è l'inversa di una funzione esponenziale a^x.

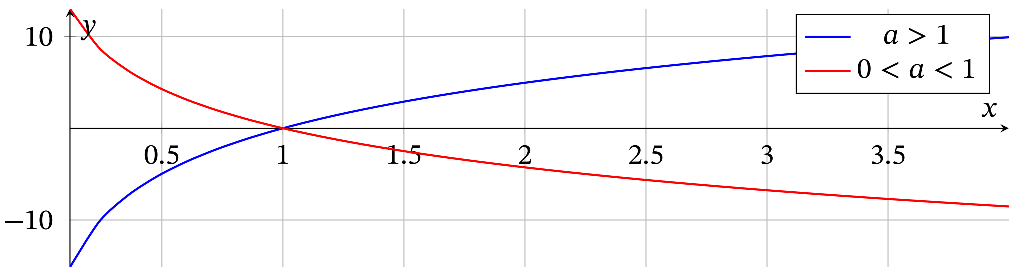
$$y = \log_a x \ \Leftrightarrow \ x = a^y \quad ; \quad a > 0 \land a \neq 1 \quad ; \quad x \in \Re^+ \tag{2.1}$$

Il *dominio* è dato da tutti i numeri reali positivi.

Il *codominio* è dato da tutti i reali.

Tutti i logaritmi passano per il punto di coordiante $P(1;0)$.

$y = \log_a x$



Se la base è compresa tra zero e uno la funzione è decrescente.

Se la base è maggiore di uno la funzione è crescente.

Proprietà dei logaritmi	
$\{a, x, y\} \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$	
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$	$\log_a x^b = b \log_a x$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$	
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$
$x = a^{\log_a x}$	$\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$

3 Equazioni logaritmiche

3.1 Equazioni elementari

Le equazioni logaritmiche elementari hanno la seguente forma:

$$\log_a x = b \tag{3.1}$$

dove a è la base del logaritmo e b un numero.

Si risolvono applicando la definizione di logaritmo.

$$y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; x = a^y \tag{3.2}$$

Esempio: $\log_3 x - 5 = 0$

- Si esprimono le condizioni di esistenza del logaritmo

$$\text{C.E.} \quad x > 0 \tag{3.3}$$

- Si cerca in generale di aver un unico addendo a primo e secondo membro.

$$\log_3 x = 5 \tag{3.4}$$

- Applico la definizione di logaritmo.

$$x = 3^5 = 243 \tag{3.5}$$

- Controllo che la soluzione ottenuta sia compatibile con le condizioni di esistenza: in questo caso sì quindi la soluzione è proprio quella trovata.

Come ausilio alla soluzione ricordiamoci che $\log_a a = 1$ e $\log_a 1 = 0$.

Esercizio 1 *Risolvi l'equazione* $\log_5 x = 2$

Le condizioni di esistenza ci dicono che $x > 0$.
Applichiamo quindi la definizione di logaritmo e scriviamo che:

$$x = 5^2 = 25 \tag{3.6}$$

Questa soluzione è compatibile con le C.E. .

3.2 Equazioni riconducibili ad elementari

Un tipo fondamentale di equazione logaritmica riconducibile ad elementare ha la seguente forma:

$$\log_a f(x) = b \tag{3.7}$$

dove $f(x)$ è una qualche espressione nell'incognita x, a è la base del logaritmo e b un numero.

Si risolvono applicando la definizione di logaritmo, come per quelle elementari, ma trasformando l'equazione logaritmica in un altro tipo di equazione. Questo tipo di equazione, quale compare solitamente nei libri di scuola, al posto di $f(x)$ ha una funzione algebrica: per cui otteniamo un'equazione algebrica.

$$\begin{gathered} y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; x = a^y \\ b = \log_a f(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) = a^b \end{gathered} \tag{3.8}$$

Esempio: $\log_7(3x-4) - 2 = 0$

- Si esprimono le condizioni di esistenza del logaritmo

$$\text{C.E.} \quad (3x-4) > 0 \quad x > \frac{4}{3} \tag{3.9}$$

- Si cerca in generale di aver un unico addendo a primo e secondo membro.

$$\log_7(3x-4) = 2 \tag{3.10}$$

- Applico la definizione di logaritmo.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 7^2 \\ 3x &= 4 + 49 \\ x &= \frac{53}{3} \end{aligned} \tag{3.11}$$

- Controllo che la soluzione ottenuta sia compatibile con le condizioni di esistenza: in questo caso sì, quindi la soluzione è proprio quella trovata.

Come ausilio alla soluzione ricordiamoci che $\log_a a = 1$ e $\log_a 1 = 0$.

Esercizio 2 *Risolvi l'equazione* $\ln(5-x) = 3$

Esprimiamo le condizioni di esistenza del logaritmo.

$$\text{C.E.} \quad (5-x) > 0 \quad x < 5 \tag{3.12}$$

Applico la definizione di logaritmo, ricordando che ln sta per logaritmo naturale e quindi la base è e.

$$\begin{aligned} 5 - x &= \mathrm{e}^3 \\ x &= 5 - \mathrm{e}^3 \end{aligned} \tag{3.13}$$

dove e^3 è semplicemente un numero positivo.

L'ultimo risultato è compatibile con le condizioni di esistenza, quindi è la soluzione.

3.3 Equazioni risolubili con le proprietà dei logaritmi

Un altro tipo di equazioni logaritmiche è quello in cui compaiono la somma o differenza di logaritmi con la stessa base o il prodotto di un numero per un logaritmo sempre con la stessa base.

Applicando le proprietà fondamentali dei logaritmi questi si possono aggregare assieme, trasformando tali equazioni nella precedente tipologia di riconducibili ad elementari.

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy \qquad \log_a x^b = b \log_a x$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$
$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$
$$x = a^{\log_a x} \qquad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

Si faccia attenzione alla seconda relazione $\log_a x^b = b \log_a x$ quando la b è un esponente pari, in quanto con la trasformazione la relazione potrebbe farci perdere delle soluzioni.

Esercizio 3 *Risolvi l'equazione* $2\log_4(3-x) - \log_4(4-2x) = \frac{1}{2}$

Esprimiamo le condizioni di esistenza del logaritmo.

$$\text{C.E.} \quad \begin{cases} 3 - x > 0 \\ 4 - 2x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ 2x < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x < 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x < 3 \tag{3.14}$$

Nella nostra equazioni compaiono più logaritmi, ma con la stessa base: proviamo ad aggregarli assieme. Il fattore 2 davanti al primo logaritmo può passare come esponente dell'argomento e la differenza tra due logaritmi con la stessa base è uguale al logaritmo del rapporto tra gli argomenti.

$$\begin{aligned} 2\log_4(3-x) - \log_4(4-2x) &= \frac{1}{2} \\ \log_4(3-x)^2 - \log_4(4-2x) &= \frac{1}{2} \\ \log_4 \frac{(3-x)^2}{(4-2x)} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Adesso abbiamo una equazione di quelle che abbiamo chiamato "riconducibili ad elementari". Quindi possiamo applicare la definizione di logaritmo.

$$\begin{aligned} \frac{(3-x)^2}{(4-2x)} &= (4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \\ \frac{(3-x)^2}{(4-2x)} - 2 &= 0 \\ \frac{9 - 6x + x^2 - 2(4-2x)}{(4-2x)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Abbiamo un'equazione fratta: la frazione vale zero solo se vale zero il numeratore. Il denominatore, fin dai passaggi precedenti, era sicuramente diverso da zero per le condizioni di esistenza del logaritmo: procediamo con il solo numeratore.

$$\begin{aligned} 9-6x+x^2-8+4x &= 0 \\ x^2-2x+1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

La soluzione è $x = 1$ ed è compatibile con la condizione di esistenza ($x < 3$).

Esercizio 4 *Risolvi l'equazione* $\log_3 x - \log_6 x = 0$

Esprimiamo le condizioni di esistenza dei logaritmo.

$$\text{C.E.} \quad x > 0 \tag{3.18}$$

In questa equazione abbiamo due logaritmi con base diversa: non possiamo aggregarli a meno che non abbiamo la stessa base. Per cui facciamo un cambiamento di base di uno dei due in modo che questo abbia la stessa base dell'altro. Trasformiamo il logaritmo con la base più grande.

$$\log_6 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 6} \tag{3.19}$$

Il $\log_3 6$ è un numero, ma non è esprimibile come numero intero, per cui lo lasciamo indicato così come è. Normalmente, nei testi scolastici, questi logaritmi sarebbero trasformabili in un numero intero per avere dei passaggi successivi più facili.
Sostituiamo il logaritmo ottenuto nell'equazione di partenza ed eliminiamo la frazione per rendere l'equazione più leggibile.

$$\begin{aligned} \log_3 x - \log_6 x &= 0 \\ \log_3 x - \frac{\log_3 x}{\log_3 6} &= 0 \\ (\log_3 6 - 1)\log_3 x &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Abbiamo un'equazione scomposta in fattori: applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto e scriviamo che:

$$\log_3 x = 0 \tag{3.21}$$

Un logaritmo vale zero solo se l'argomento vale uno. Per cui la soluzione è $x = 1$, compatibile con le condizioni di esistenza.

Esercizio 5 *Risolvi l'equazione* $4 = \log_3(2-3x)^2$

Esprimiamo le condizioni di esistenza dei logaritmo.

$$\text{C.E.} \quad (2-3x)^2 > 0 \tag{3.22}$$

Questa disequazione è sempre verificata se la base della potenza è diversa da zero, ovvero quando:

$$2-3x \neq 0 \quad -3x \neq -2 \quad x \neq \frac{2}{3} \tag{3.23}$$

Per risolvere l'equazione trasformiamo il primo membro in un logaritmo con la stessa base del secondo membro. Ricordiamo che $\log_a a = 1$.

$$\begin{aligned} 4 &= \log_3(2-3x)^2 \\ 4\log_3 3 &= \log_3(2-3x)^2 \\ \log_3 3^4 &= \log_3(2-3x)^2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Adesso possiamo eguagliare gli argomenti dei logaritmi.

$$\begin{aligned} 3^4 &= (2-3x)^2 \\ 81 &= 4-24x+9x^2 \\ 9x^2-12x-77 &= 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered} x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2-4(9)(-77)}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{2916}}{18} = \frac{24 \pm 54}{18} = \frac{8 \pm 9}{3} \\ x_1 = \frac{8+9}{3} = \frac{13}{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{8-9}{3} = -\frac{5}{3} \end{gathered} \tag{3.26}$$

Entrambe le soluzioni sono compatibili con le condizioni di esistenza.

Osservazione

Se avessimo trasformato l'equazione iniziale $4 = \log_3(2-3x)^2$ nella $4 = 2\log_3(2-3x)$ avremmo perso una soluzione in quanto avremmo implicitamente supposto che $2-3x$ sia sempre positivo, mentre nell'equazione di partenza avrebbe potuto essere anche negativo.

3.4 Equazioni risolubili con un'incognita ausiliaria

Un'ultima categoria di equazioni logaritmiche è quella in cui possiamo individuare uno stesso identico logaritmo in una o più elementi dell'equazione. Sostituendo quella funzione logaritmica con un'incognita ausiliaria si può tentare di trasformare l'equazione logaritmica in un'equazione algebrica. Risolta l'equazione algebrica si attribuiscono i risultati ottenuti al logaritmo di partenza, ottenendo una o più equazioni logaritmiche elementari.

Esempio: $3\log_5^2 x + 18\log_5 x + 24 = 0$

- Imponiamo le condizioni di esistenza per i logaritmi.

$$\text{C.E.} \quad x > 0 \tag{3.27}$$

- I due logaritmi che compaiono hanno la stessa base e lo stesso argomento, ma il primo è elevato al quadrato e quindi non si possono aggregare assieme.
  Possiamo però fare una sostituzione con un cambio di variabile.

$$\begin{gathered} \log_5 x = t \\ 3t^2 + 18t + 24 = 0 \end{gathered} \tag{3.28}$$

- Abbiamo ottenuto un'equazione algebrica di secondo grado: risolviamola.

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 3\cdot 24}}{6} = \frac{-18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{-18 \pm 6}{6} \tag{3.29}$$

$$t = -2 \quad ; \quad t = -4 \tag{3.30}$$

- Eguagliamo il logaritmo di partenza ai due valori ottenuti per t, ottenendo due equazioni logaritmiche elementari.

$$\begin{aligned} \log_5 x = -2 \quad &; \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \\ \log_5 x = -4 \quad &; \quad x = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} \end{aligned} \tag{3.31}$$

  Entrambe le soluzioni sono compatibili con le condizioni di esistenza ($x > 0$).

3.5 Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Le equazioni esponenziali elementari si risolvono riducendo l'equazione a due esponenziali con la stessa base posti ai due membri dell'equazione. Questo non è sempre possibile, ma con l'aiuto dei logaritmi si possono avere anche due basi diverse a primo e secondo membro.

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Facendo il logaritmo del primo e secondo membro dell'equazione riusciamo a mettere in evidenza l'esponente di uno dei dei esponenziali e quindi l'incognita.

Esempio: $3^{x+1} - 10 = 0$

- Si cerca in generale di aver un unico addendo a primo e secondo membro.

$$3^{x+1} = 10 \tag{3.32}$$

- Questo è stato possibile, ma non abbiamo la stessa base. Tuttavia possiamo fare il logaritmo di primo e secondo membro, logaritmo nella base dell'espressione con l'incognita.

$$\begin{aligned} \log_3(3^{x+1}) &= \log_3(10) \\ (x+1) \cdot \log_3 3 &= \log_3 10 \\ x+1 &= \log_3 10 \\ x &= -1 + \log_3 10 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Esercizio 6 *Risolvi la seguente equazione:* $5^{2x-3} - 7^{1-4x} = 0$

Lasciamo un esponenziale a primo membro e portiamo l'altro a secondo membro.

$$5^{2x-3} = 7^{1-4x} \tag{3.34}$$

Non abbiamo la stessa base. Possiamo usare i logaritmi. L'incognita è presente con entrambe le basi: scegliamo come base per il logaritmo quella che preferiamo. Qui scelgo la base 5.

$$\begin{aligned} \log_5(5^{2x-3}) &= \log_5(7^{1-4x}) \\ (2x-3)\log_5 5 &= (1-4x)\log_5 7 \\ 2x-3 &= \log_5 7 - 4x\log_5 7 \\ 2x + 4x\log_5 7 &= 3 + \log_5 7 \\ x(2+4\log_5 7) &= 3 + \log_5 7 \\ x &= \frac{3+\log_5 7}{2+4\log_5 7} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Se l'espressione ottenuta non è ritenuta abbastanza elegante si può tentare di scriverla diversamente applicando un cambiamento di base ai logaritmi e facendoli diventare logaritmi naturali.

$$\frac{3+\log_5 7}{2+4\log_5 7} = \frac{3+\dfrac{\ln 7}{\ln 5}}{2+4\dfrac{\ln 7}{\ln 5}} = \frac{\dfrac{3\ln 5+\ln 7}{\ln 5}}{\dfrac{2\ln 5+4\ln 7}{\ln 5}} = \frac{3\ln 5+\ln 7}{2\ln 5+4\ln 7} \tag{3.36}$$

4 Disequazioni logaritmiche

4.1 Disequazioni elementari

Le equazioni logaritmiche elementari hanno la forma del tipo:

$$\log_a x > b \tag{4.1}$$

dove a è la base del logaritmo e b un numero.

I metodo di risoluzione
Trasformiamo il numero a secondo membro in logaritmo, moltiplicandolo per $1 = \log_a a$, e passiamo dalla relazione tra logaritmi alla relazione tra gli argomenti.

$$\begin{aligned} &\log_a x > b \cdot 1 \\ &\log_a x > b \cdot \log_a a \\ &\log_a x > \log_a a^b \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se la base a è maggiore di uno la relazione tra gli argomenti segue quella tra i logaritmi.

$$a > 0 \;\Leftrightarrow\; x > a^b \tag{4.3}$$

Se la base a è compresa tra zero e uno la relazione tra gli argomenti ha verso opposto a quella tra i logaritmi.

$$0 < a < 1 \;\Leftrightarrow\; x < a^b \tag{4.4}$$

II metodo di risoluzione
Si passa direttamente dalla relazione 4.1 alle relazioni 4.3 e 4.4, in analogia alla definizione di logaritmo usata per le equazioni elementari.

$$\log_a x > b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > a^b & \text{se} \quad a > 1 \\ x < a^b & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

Esercizio 7 *Risolvi la disequazione* $\log_6 x < 5$

Le condizioni di esistenza ci dicono immediatamente che $x > 0$.

I metodo di risoluzione

$$\begin{aligned} &\log_6 x < 5 \cdot 1 \\ &\log_6 x < 5 \cdot \log_6 6 \\ &\log_6 x < \log_6 6^5 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se passiamo alla relazione tra gli argomenti, considerando che la base è maggiore di uno, possiamo scrivere:

$$x < 6^5 \tag{4.7}$$

La soluzione è compatibile con le condizioni di esistenza.

II metodo di risoluzione

Possiamo scrivere direttamente che:

$$x < 6^5 \tag{4.8}$$

4.2 Altri tipi di disequazioni

Gli altri tipi di disequazioni logaritmiche si possono ricondurre direttamente alle analoghe tipologie di equazioni prima illustrate, tenendo sempre conto quanto qui indicato per le disequazioni elementari.