Equazioni e disequazioni goniometriche

esercizi svolti e ordinati per competenze

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alle equazioni e disequazioni goniometriche, quali si studiano attualmente al liceo scientifico; sono pensati come sintesi per un ripasso, soprattutto per gli alunni più in difficoltà. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso.
Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

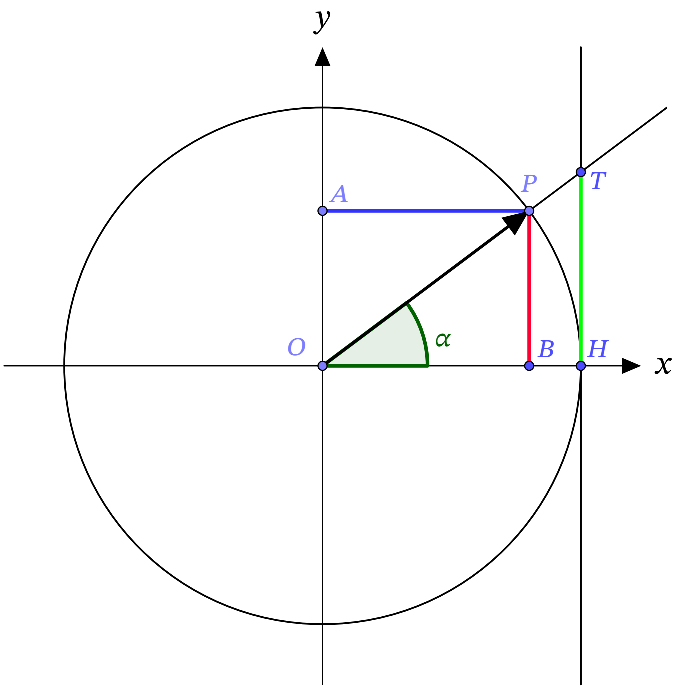
1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Niccolò Balia, Benedetta Olla, Paolo Aresca.

2 Funzioni goniometriche

Abbiamo una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine degli assi cartesiani. Prendiamo gli angoli al centro della circonferenza orientati che hanno come primo lato il semiasse positivo delle x e come secondo lato il raggio vettore indicato in figura. Questo raggio vettore intercetta la circonferenza nel punto P.



- Chiamiamo **seno** dell'angolo l'ordinata del punto P.
- Chiamiamo **coseno** dell'angolo l'ascissa del punto P.
- Chiamiamo **tangente** dell'angolo il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa del punto P.

$$\sin\alpha = \overline{PB} \quad ; \quad \cos\alpha = \overline{PA} \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \tag{2.1}$$

La tangente dell'angolo è anche l'ascissa del punto di intersezione T tra il raggio vettore dell'angolo e la tangente alla circonferenza nel punto H di coordinate $(1;0)$.

$$\tan\alpha = \overline{TH} \tag{2.2}$$

Per ogni angolo possiamo trovare un punto P e quindi sempre un'ascissa e un'ordinata.

Non possiamo trovare sempre il rapporto perché non avrebbe significato quando il denominatore e quindi l'ascissa fosse uguale zero. Di conseguenza possiamo calcolare il seno e il coseno di qualsiasi angolo; invece non possiamo calcolare la tangente di $\frac{\pi}{2}$ e di $\frac{3\pi}{2}$.

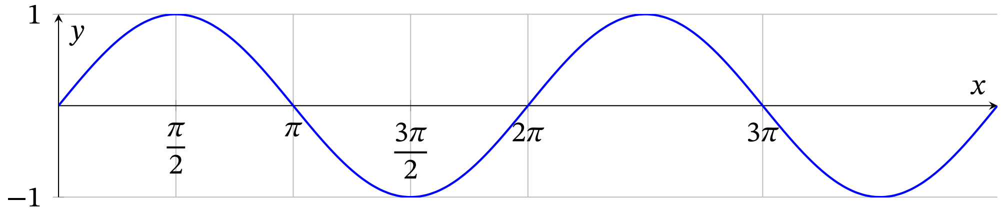
- Il dominio della funzione $y = \sin\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathfrak{R}$
- Il dominio della funzione $y = \cos\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathfrak{R}$
- Il dominio della funzione $y = \tan\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathfrak{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

Il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto P, essendo confinato sulla circonferenza, è sempre compreso tra 1 e -1.

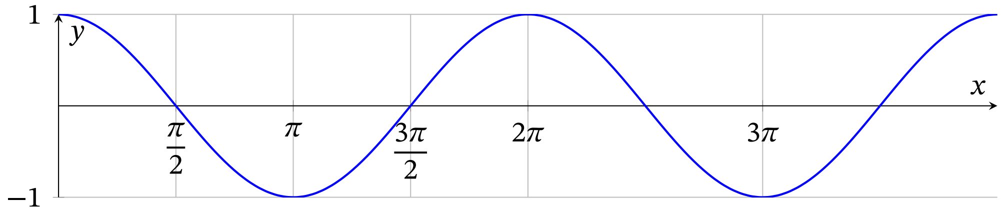
- Il codominio della funzione $y = \sin\alpha$ è $\quad [-1 : 1]$
- Il codominio della funzione $y = \cos\alpha$ è $\quad [-1 : 1]$
- Il codominio della funzione $y = \tan\alpha$ è $\quad \forall x \in \mathfrak{R}$

2.1 Grafici

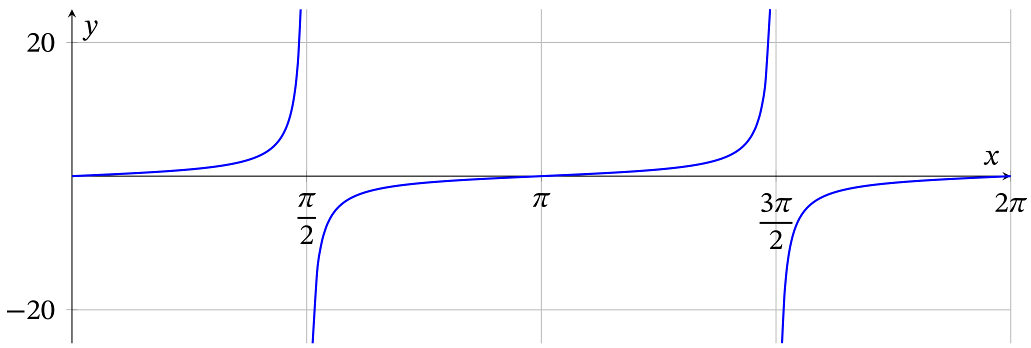
$y = \sin x$



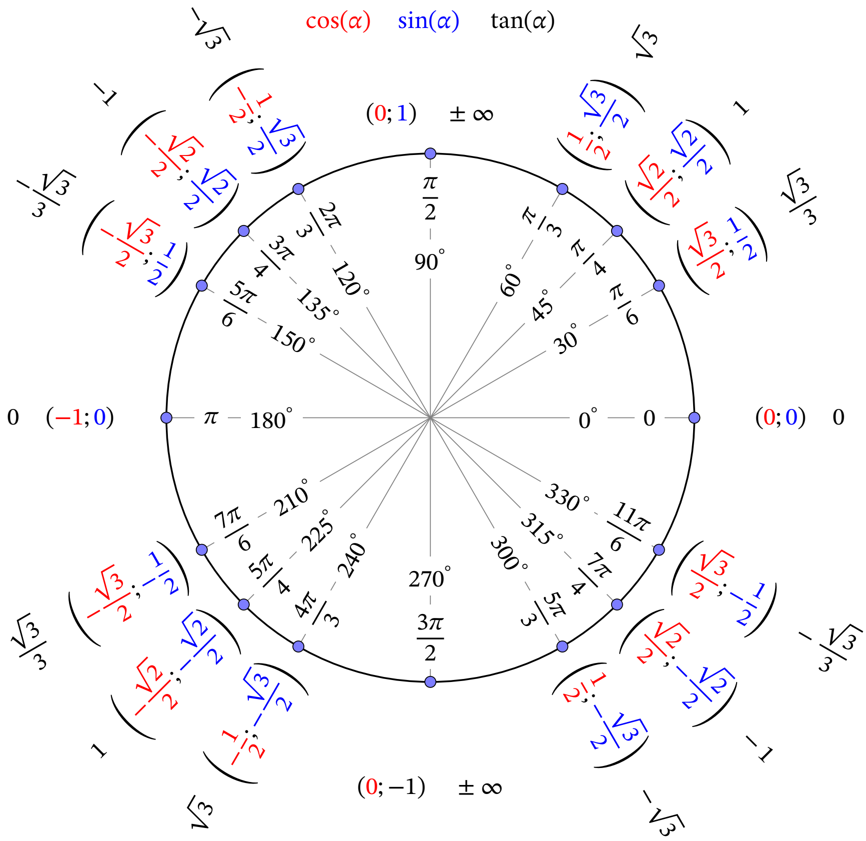
$y = \cos x$



$y = \tan x$



2.2 Angoli notevoli ed associati



$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha)$

Regola mnemonica

- Se l'argomento di partenza contiene un multiplo di π allora la funzione non cambia nome
- Se l'argomento di partenza contiene un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ allora la funzione cambia nome
- Il segno finale è determinato dal segno della funzione a primo membro nel suo quadrante

2.3 Altre formule

Formule di trasformazione	
$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$
$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \pm\dfrac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	
$\sin(\alpha) = \pm\dfrac{\lvert\tan(\alpha)\rvert}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\cos(\alpha) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
addizione e sottrazione	
$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$	
$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	
$\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$	
duplicazione	
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$	$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
	$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$	$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
bisezione	
$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}}$	$\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	
prostaferesi	
$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	
$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	
$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	
$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	

3 Forme elementari

3.1 Equazioni elementari

Le equazioni goniometriche elementari hanno tutte la forma di una funzione goniometrica eguagliata ad un numero.

$$\sin(x) = m \quad ; \quad \cos(x) = m \quad ; \quad \tan(x) = m \tag{3.1}$$

Qui di seguito viene illustrata la soluzione generale per le tre funzioni goniometriche fondamentali. Per le sole equazioni non è strettamente necessario fare un disegno per trovare la soluzione: negli esempi seguenti ne farò comunque uno, perché mi sembra una pratica che può aiutare a ricordare meglio la soluzione generale o a capire l'eventuale caso particolare che si ha dinnanzi.

seno

$$\sin x = m \tag{3.2}$$

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \quad ; \quad x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi$$
$$\text{con} \quad \alpha = \arcsin(m) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

Esistono soluzioni solo se $-1 \leq m \leq 1$, altrimenti è impossibile.

Esercizio 1 *Risolvi l'equazione* $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

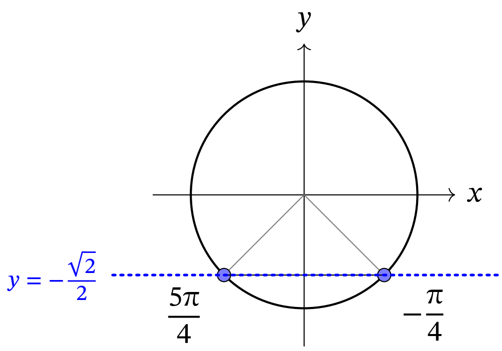
Troviamo la soluzione fondamentale a mente o con la calcolatrice:

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \tag{3.4}$$

In generale esistono due angoli supplementari che hanno lo stesso seno: abbiamo quindi una seconda soluzione:

$$x_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4} \tag{3.5}$$

Queste sono le due soluzioni base: le rappresentiamo.



I due angoli trovati sono sempre individuati sulla circonferenza goniometrica dall'intersezione con una linea *orizzontale*, di equazione $y = k$, posta sulla ordinata del numero che compare nell'equazione, cioè $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A queste due soluzioni fondamentali possiamo aggiungere o togliere un numero intero qualsiasi di angoli giri: l'angolo ottenuto ha ancora lo stesso seno. Il seno infatti è una funzione periodica di periodo 2π.

Infine la soluzione generale è:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \tag{3.6}$$

coseno

$$\cos x = m \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} x_{1,2} = \pm\alpha + 2k\pi \\ \text{con} \quad \alpha = \arccos(m) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{gathered} \tag{3.8}$$

Esistono soluzioni solo se $-1 \leq m \leq 1$, altrimenti è impossibile.

Esercizio 2 *Risolvi l'equazione* $\cos x = \dfrac{1}{2}$

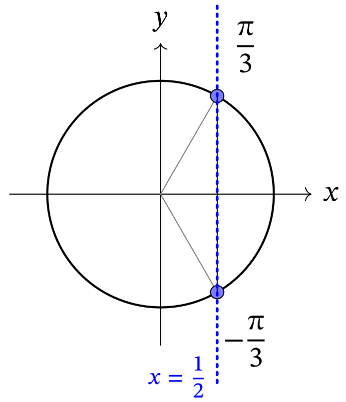
Troviamo la soluzione fondamentale a mente o con la calcolatrice:

$$x_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{3.9}$$

In generale esistono due angoli *opposti* che hanno lo stesso coseno: abbiamo quindi una seconda soluzione.

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} \tag{3.10}$$

Queste sono le due soluzioni base: le rappresentiamo.



I due angoli trovati sono sempre individuati sulla circonferenza goniometrica dall'intersezione con una linea *verticale*, di equazione $x = k$, posta sulla ascissa del numero che compare nell'equazione, cioè $\frac{1}{2}$.

A queste due soluzioni fondamentali possiamo aggiungere o togliere un numero intero qualsiasi di angoli giri: l'angolo ottenuto ha ancora lo stesso coseno. Il coseno infatti è una funzione periodica di periodo 2π.

Infine la soluzione generale è:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \tag{3.11}$$

tangente

$$\tan x = m \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered} x = \alpha + k\pi \\ \text{con} \quad \alpha = \arctan(m) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{gathered} \tag{3.13}$$

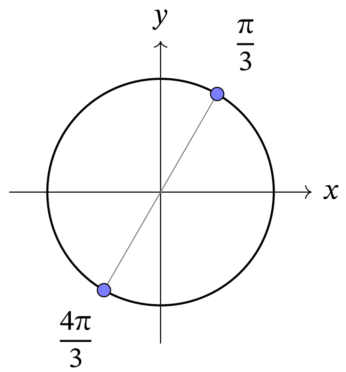
Esistono soluzioni per qualsiasi valore di m.

Esercizio 3 *Risolvi l'equazione* $\tan x = \sqrt{3}$

Troviamo la soluzione fondamentale a mente o con la calcolatrice:

$$x = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \tag{3.14}$$

In un periodo 2π, ovvero sulla circonferenza goniometrica, ci sono in generale due soluzioni: la prima è quella ottenuta mentre la seconda (a causa del periodo π della funzione tangente) si trova un angolo π più avanti. Queste sono le due soluzioni base: le rappresentiamo.



I secondi lati dei due angoli stanno sempre sullo stesso diametro della circonferenza goniometrica.

Infine la soluzione generale è:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \tag{3.15}$$

3.2 Disequazioni elementari

Le disequazioni goniometriche elementari hanno tutte la forma di una funzione goniometrica maggiore o minore rispetto ad un numero. Qui di seguito viene illustrato un esempio di soluzione per le tre funzioni goniometriche fondamentali.

La soluzione passa attraverso la soluzione dell'equazione associata. Un volta trovate le soluzioni fondamentali di questa dobbiamo, *obbligatoriamente*, riportare le soluzioni in una circonferenza goniometrica. A seconda del verso della disequazione possiamo disegnare l'arco di circonferenza corrispondente alla soluzione fondamentale nell'intervallo $[0; 2\pi)$. Scriviamo infine la soluzione analitica con l'opportuna periodicità.

Disequazioni con seno

Esercizio 4 *Risolvi l'equazione* $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

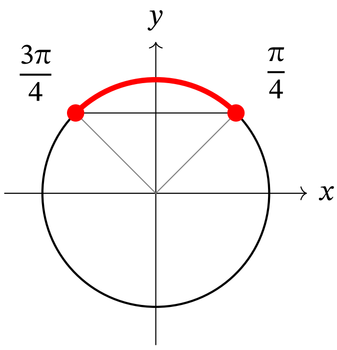
Troviamo la soluzione fondamentale a mente o con la calcolatrice:

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \tag{3.16}$$

E la seconda soluzione:

$$x_2 = \pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \tag{3.17}$$

Queste sono le due soluzioni base. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino pieno dato che nella disequazione è presente anche l'uguale.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il seno dell'angolo *è maggiore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto *più in alto* dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.

Per indicare quell'arco possiamo andare senza soluzione di continuità dal primo angolo al secondo. La soluzione relativa alla circonferenza goniometrica è:

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \tag{3.18}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione seno possiamo scrivere:

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \tag{3.19}$$

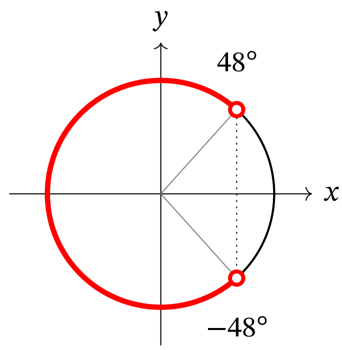
Disequazioni con coseno

Esercizio 5 *Risolvi l'equazione* $\cos x < \dfrac{2}{3}$

Troviamo le soluzioni fondamentali dell'equazione associata a mente o con la calcolatrice:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \simeq \pm 48{,}2° \tag{3.20}$$

Il coseno dato non è associato ad un angolo notevole. Possiamo trovare l'angolo corrispondente con la calcolatrice, ma si può tranquillamente lasciare indicato nella soluzione l'arcocoseno.
Queste sono le due soluzioni base. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino vuoto dato che nella disequazione non è presente anche l'uguale.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il coseno dell'angolo *è minore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto *più a sinistra* dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.
Per indicare quell'arco non possiamo andare senza soluzione di continuità dal primo angolo al secondo. Se partiamo da 48° arriviamo a $360° - 48° = 312°$, cioè $2\pi - \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.
Di conseguenza la soluzione relativa alla circonferenza goniometrica è:

$$\arccos\left(\frac{2}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \tag{3.21}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione coseno possiamo scrivere:

$$2k\pi + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \tag{3.22}$$

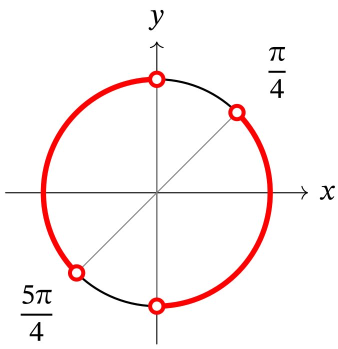
Disequazioni con tangente

Esercizio 6 *Risolvi l'equazione* $\tan x \leq 1$

Troviamo la soluzione fondamentale dell'equazione associata a mente o con la calcolatrice:

$$x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \tag{3.23}$$

Ricordiamoci che la tangente ha periodo π e nella circonferenza goniometrica sono presenti due angoli, separati di π, che hanno la stessa tangente. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino vuoto dato che nella disequazione non è presente anche l'uguale; per le condizioni di esistenza anche $\pi/2$ e $3\pi/2$ non sono compresi nelle soluzioni.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui la tangente dell'angolo *è minore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco che parte dall'angolo prima trovato $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e arriva fino a $-\frac{\pi}{2}$ andando *in senso orario*; se avessimo avuto il maggiore ci saremo orientati in senso antiorario. Questo riguarda la semicirconferenza che sta sulla destra; lo stesso arco si presenta, traslato di π, sulla semicirconferenza di sinistra. Questi sono i due archi segnati in rosso nella figura precedente. Ricordiamoci che la tangente di $\pm\frac{\pi}{2}$ non esiste, ragione per cui abbiamo indicato la fine dell'arco con un pallino vuoto.
Nello scrivere la soluzione finale consideriamo uno solo di quegli archi: quello di destra ad esempio.

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{4} \tag{3.24}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione tangente possiamo scrivere:

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \tag{3.25}$$

4 Forme riconducibili ad elementari

4.1 Equazioni elementari con sostituzione

Le equazioni goniometriche elementari con sostituzione hanno tutte la forma di una funzione goniometrica eguagliata ad un numero, come quelle elementari. Tuttavia l'argomento della funzione goniometrica è dato da un'altra funzione.

$$\sin(f(x)) = m \quad ; \quad \cos(f(x)) = m \quad ; \quad \tan(f(x)) = m \tag{4.1}$$

Si tratta quindi di sostituire quella funzione con una nuova variabile, risolvere l'equazione elementare ottenuta con quella variabile, e fare infine l'inversa (secondo la funzione sostituita) delle soluzioni ottenute.

Le equazioni di questo tipo presenti nei testi scolastici prevedono di solito che al posto di $f(x)$ ci sia un semplice polinomio, magari di primo grado. Ma in generale l'espressione potrebbe consistere anche in espressioni logaritmiche ed esponenziali, rendendo necessario includere anche le condizioni di esistenza della funzione stessa. Inoltre, in linea di principio, non è neanche detto che si possa fare l'inversa.

Qui di seguito viene illustrata la soluzione generale per le tre funzioni goniometriche fondamentali.

seno

$$\sin(f(x)) = m \tag{4.2}$$

$$z = f(x) \quad ; \quad \sin z = m \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} z_1 = \alpha + 2k\pi \quad ; \quad z_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi \\ \text{con} \quad \alpha = \arcsin(m) \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$x_1 = f^{-1}(z_1) \quad ; \quad x_2 = f^{-1}(z_2) \tag{4.5}$$

Esercizio 7 *Risolvi l'equazione* $\sin(3x - \pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Facciamo subito la naturale sostituzione:

$$3x - \pi = z \tag{4.6}$$

L'equazione diventa:

$$\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.7}$$

Le soluzioni sono:

$$z_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad z_2 = \pi - \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \tag{4.8}$$

Infine la soluzione generale è:

$$z_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad z_2 = \frac{2\pi}{4} + 2k\pi \tag{4.9}$$

Adesso dobbiamo risostituire a z la sua espressione e mettere in evidenza x nell'equazione ottenuta.

$$\begin{aligned} 3x_1 - \pi &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi + \pi \\ x_1 &= \frac{\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{9} + (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} 3x_2 - \pi &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x_2 &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \pi \\ x_2 &= \frac{\frac{2\pi}{3} + (2k+1)\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{aligned} \tag{4.11}$$

coseno

$$\cos f(x) = m \tag{4.12}$$

$$z = f(x) \quad ; \quad \cos z = m \tag{4.13}$$

$$z_{1,2} = \pm\alpha + 2k\pi \quad \text{con} \quad \alpha = \arccos(m) \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.14}$$

$$x_1 = f^{-1}(z_1) \quad ; \quad x_2 = f^{-1}(z_2) \tag{4.15}$$

Esercizio 8 *Risolvi l'equazione* $\cos\left(\frac{x}{3} + 4\right) = -\frac{1}{2}$

Facciamo subito la naturale sostituzione:

$$\frac{x}{3} + 4 = z \tag{4.16}$$

L'equazione diventa:

$$\cos z = -\frac{1}{2} \tag{4.17}$$

Le soluzione fondamentale è:

$$z = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} \tag{4.18}$$

Infine la soluzione generale è:

$$z = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \tag{4.19}$$

Adesso dobbiamo risostituire a z la sua espressione e mettere in evidenza x nell'equazione ottenuta.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} + 4 &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\
\frac{x}{3} &= -4 \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\
x &= 3\left(-4 \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -12 \pm 2\pi + 6k\pi
\end{aligned} \tag{4.20}$$

tangente

$$\tan f(x) = m \tag{4.21}$$

$$z = \alpha + k\pi \quad \text{con} \quad \alpha = \arctan(m) \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.22}$$

$$x = f^{-1}(z) \tag{4.23}$$

Esercizio 9 *Risolvi l'equazione* $\tan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Le condizioni di esistenza della radice quadrata ci dicono che:

$$\sqrt{x} \Rightarrow \text{C.E.} \quad x \geq 0 \tag{4.24}$$

ne dobbiamo tenere conto alla fine.
Facciamo subito la naturale sostituzione:

$$\sqrt{x} = z \tag{4.25}$$

L'equazione diventa:

$$\tan z = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{4.26}$$

Le soluzione fondamentale è:

$$z = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \tag{4.27}$$

Infine la soluzione generale è:

$$z = \frac{\pi}{6} + k\pi \tag{4.28}$$

Adesso dobbiamo risostituire a z la sua espressione e mettere in evidenza x nell'equazione ottenuta.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x &= \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)^2 \\ x &= \frac{\pi^2}{36} + 2k\frac{\pi^2}{6} + k^2\pi^2 \end{aligned} \tag{4.29}$$

La soluzione finale è

$$x = \frac{\pi^2}{36} + k\frac{\pi^2}{3} + k^2\pi^2 \wedge x \geq 0 \tag{4.30}$$

4.2 Disequazioni elementari con sostituzione

Le disequazioni goniometriche elementari con sostituzione si risolvono come le equazioni corrispondenti. Una volta risolta la disequazione con la variabile accessoria possiamo scrivere la corrispondente soluzione in x o nella variabile principale.

Disequazioni con seno

Esercizio 10 *Risolvi la disequazione* $\sin\left(\pi - \frac{x}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$

Facciamo subito la naturale sostituzione:

$$z = \pi - \frac{x}{4} \tag{4.31}$$

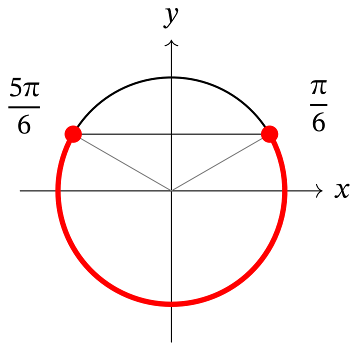
La disequazione diventa:

$$\sin z \leq \frac{1}{2} \tag{4.32}$$

Risolviamo l'equazione associata. Le soluzioni fondamentali sono:

$$z_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad z_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \tag{4.33}$$

Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino pieno dato che nella disequazione è presente anche l'uguale.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il seno dell'angolo *è minore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto *più in basso* dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.
Per indicare quell'arco abbiamo due possibilità:

1. Partiamo dall'angolo zero e spostiamoci in verso antiorario nel verso positivo degli angoli orientati fino ad arrivare a 2π radianti ovvero percorrendo tutta circonferenza. Abbiamo allora due intervalli come soluzione.

$$0 \leq z \leq \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5\pi}{6} \leq z < 2\pi \tag{4.34}$$

2. Oppure, in maniera forse più elegante perché scriviamo un solo intervallo, partiamo da $5\pi/6$ radianti e spostiamoci in verso antiorario nel verso positivo degli angoli orientati fino ad arrivare al secondo angolo. Questo secondo angolo non è però $\pi/6$ ma:

$$2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \tag{4.35}$$

perché stiamo superando l'angolo giro. La soluzione può quindi essere scritta come:

$$\frac{5\pi}{6} \leq z \leq \frac{13\pi}{6} \tag{4.36}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione seno possiamo scrivere:

$$2k\pi + \frac{5\pi}{6} \le z \le \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \tag{4.37}$$

Prenderemo questa come soluzione della disequazione in z perché più compatta da scrivere. Adesso dobbiamo risostituire a z la sua espressione e mettere in evidenza x nella disequazione ottenuta. Osserviamo che in questo caso dobbiamo prendere *l'intersezione* tra le due soluzioni che otterremo, perché la soluzione deve soddisfare la doppia relazione qui scritta.

$$\begin{aligned}
&2k\pi + \frac{5\pi}{6} \le z \\
&2k\pi + \frac{5\pi}{6} \le \pi - \frac{x}{4} \\
&\frac{x}{4} \le \pi - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\
&x \le \frac{\pi}{6} \cdot 4 + 8k\pi \qquad ; \qquad x \le \frac{2\pi}{3} + 8k\pi
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
&z \le \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \\
&\pi - \frac{x}{4} \le \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \\
&-\frac{x}{4} \le +\frac{13\pi}{6} - \pi + 2k\pi \\
&x \ge \frac{7\pi}{6} \cdot (-4) + 8k\pi \qquad ; \qquad x \ge -\frac{14\pi}{3} + 8k\pi
\end{aligned} \tag{4.39}$$

In un'unica scrittura:

$$-\frac{14\pi}{3} + 8k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 8k\pi \tag{4.40}$$

5 Equazioni per confronto

Questa tipologia di equazioni hanno la forma di una eguaglianza tra due funzioni goniometriche.

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \quad ; \quad \cos(\alpha) = \cos(\beta) \quad ; \quad \tan(\alpha) = \tan(\beta) \tag{5.1}$$

Osserviamo che quando nei passaggio finali ci si trova a dividere k per un numero negativo è comunque più elegante lasciarlo sempre positivo (se possibile): infatti k assume valori sia positivi che negativi e il suo insieme non cambia se lo cambiamo di segno.

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \tag{5.2}$$

Due angoli hanno lo stesso seno se sono uguali o supplementari.

$$\alpha = \beta \quad ; \quad \alpha + \beta = \pi \tag{5.3}$$

Per la periodicità della funzione seno le soluzioni generali sono:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \quad ; \quad \alpha + \beta = \pi + 2k\pi \tag{5.4}$$

In generale α e β sono due funzioni in x e la soluzione prima indicata ci conduce ad un'altra equazione in x, anche se solitamente si usano solo polinomi di primo grado o poco più.

Esercizio 11 *Risolvi l'equazione* $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2 - 3x)$

I due insiemi di soluzioni sono:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= (2 - 3x) + 2k\pi \\ 4x &= 2 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (2 - 3x) &= \pi + 2k\pi \\ -2x &= -2 - \frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi \\ -2x &= -2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= 1 - \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \tag{5.7}$$

Due angoli hanno lo stesso coseno se sono uguali o opposti.

$$\alpha = \beta \quad ; \quad \alpha = -\beta \tag{5.8}$$

Per la periodicità della funzione coseno le soluzioni generali sono:

$$\alpha = \pm\beta + 2k\pi \tag{5.9}$$

In generale α e β sono due funzioni in x e la soluzione prima indicata ci conduce ad un'altra equazione in x, anche se solitamente si usano solo polinomi di primo grado o poco più.

Esercizio 12 *Risolvi l'equazione* $\cos(\pi + 5x) = \cos(3x - 4)$

I due insiemi di soluzioni sono:

$$\begin{aligned}(\pi + 5x) &= (3x - 4) + 2k\pi \\ 2x &= -\pi - 4 + 2k\pi \\ x &= -\frac{\pi}{2} - 2 + k\pi\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}(\pi + 5x) &= -(3x - 4) + 2k\pi \\ \pi + 5x &= -3x + 4 + 2k\pi \\ 8x &= -\pi + 4 + 2k\pi \\ x &= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{4}\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta) \tag{5.12}$$

Due angoli hanno lo stesso coseno se sono uguali.

$$\alpha = \beta \qquad \{\alpha, \beta\} \neq \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \tag{5.13}$$

Per la periodicità della funzione tangente le soluzioni generali sono:

$$\alpha = \beta + k\pi \tag{5.14}$$

In generale α e β sono due funzioni in x e la soluzione prima indicata ci conduce ad un'altra equazione in x, anche se solitamente si usano solo polinomi di primo grado o poco più.

Esercizio 13 *Risolvi l'equazione* $\tan(x-3) = \tan(7-4x)$

Scriviamo le condizioni di esistenza per le due tangenti.

$$\begin{aligned} x - 3 &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x &\neq 3 + \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} 7 - 4x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ -4x &\neq -7 + \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x &\neq \frac{4}{7} - \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{5.16}$$

La soluzione generale è:

$$\begin{aligned} (x-3) &= (7-4x) + k\pi \\ 5x &= 10 + k\pi \\ x &= 2 + k\frac{\pi}{5} \end{aligned} \tag{5.17}$$

In conclusione possiamo scrivere:

$$x = 2 + k\frac{\pi}{5} \wedge \left(x \neq \frac{4}{7} - \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right) \wedge \left(x \neq 3 + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \tag{5.18}$$

Variazioni sul tema

Esistono delle varianti delle equazioni prima mostrate che ad esse si possono ricondurre con facili relazioni goniometriche. Queste equazioni possono avere la seguente forma.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) = -\sin(\beta) \quad ; \quad \cos(\alpha) = -\cos(\beta) \quad ; \quad \tan(\alpha) = -\tan(\beta) \\ \sin(\alpha) = \cos(\beta) \quad ; \quad \sin(\alpha) = -\cos(\beta) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Le precedenti equazioni si possono ricondurre a quelle già illustrate eliminando il segno meno tra primo e secondo membro e/o trasformando un seno in coseno o viceversa.

$$\begin{aligned} -\sin(\gamma) = \sin(-\gamma) \quad ; \quad -\cos(\gamma) = \cos(\pi+\gamma) \quad ; \quad -\tan(\gamma) = \tan(-\gamma) \\ \sin(\gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \quad ; \quad \cos(\gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Esercizio 14 *Risolvi la seguente equazione:* $\sin(\pi - x) = -\cos(5 + 2x)$

Possiamo risolvere l'equazione eliminando il segno meno e trasformando una delle due funzioni nell'altra a nostro piacimento. Se la ricordiamo possiamo usare direttamente una delle relazioni tra angoli associati come $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) = -\sin(\gamma)$ o procedere in due passaggi secondo le relazioni qui sopra scritte. Facciamo due passaggi.

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= -\cos(5 + 2x) \\ \sin(\pi - x) &= \cos(\pi + 5 + 2x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi + 5 + 2x)\right) \\ \sin(\pi - x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi - 5 - 2x\right) \\ \sin(\pi - x) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 5 - 2x\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Abbiamo ottenuto la prima tipologia di equazione illustrata in questo paragrafo. Possiamo quindi scrivere che i due insiemi di soluzioni associati all'equazione sono:

$$\begin{aligned} (\pi - x) &= \left(\frac{3}{2}\pi - 5 - 2x\right) + 2k\pi \\ -x + 2x &= \frac{3}{2}\pi - \pi - 5 + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} - 5 + 2k\pi \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} (\pi - x) + \left(\frac{3}{2}\pi - 5 - 2x\right) &= \pi + 2k\pi \\ -x - 2x &= -\frac{3}{2}\pi + 5 + \pi - \pi + 2k\pi \\ -3x &= -\frac{3}{2}\pi + 5 + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} - \frac{5}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{aligned} \tag{5.23}$$

6 Forme riconducibili ad algebriche

Alcuni tipi di equazioni e disequazioni presentano *un'unica funzione goniometrica* moltiplicata per un numero ed elevata a potenza intera o razionale. Sostituendo questa funzione goniometrica con un'altra variabile possono essere trasformate in equazioni o disequazioni algebriche.

Una volta trovata la soluzione in questa nuova variabile possiamo risostituire la funzione goniometrica di partenza ottenendo una o più equazioni o disequazioni elementari.

6.1 Equazioni

Esercizio 15 *Risolvi la seguente equazione:* $\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$

La nostra equazione goniometrica non è elementare, né della forma delle equazioni per confronto. Abbiamo un'unica funzione goniometrica che compare con potenze intere ed è ogni volta moltiplicata per un numero. Possiamo procedere con un cambio di variabile.

$$\begin{gathered} z = \sin(x) \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{gathered} \tag{6.1}$$

Risolviamo l'equazione algebrica ottenuta.

$$\begin{gathered} z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ z_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad z_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{gathered} \tag{6.2}$$

A ritroso scriviamo:

$$\sin(x) = 1 \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{6.3}$$

$$\sin(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile} \tag{6.4}$$

La prima equazione la consideriamo del tutto immediata. La seconda è chiaramente impossibile.

6.2 Disequazioni

Esercizio 16 *Risolvi la seguente equazione:* $6\cos^2(x) + (2 - 3\sqrt{3})\cos(x) - \sqrt{3} > 0$

La nostra disequazione goniometrica non è elementare, né della forma delle equazioni per confronto. Abbiamo un'unica funzione goniometrica che compare con potenze intere ed è ogni volta moltiplicata per un numero. Possiamo procedere con un cambio di variabile.

$$\begin{aligned} &z = \cos(x) \\ &6z^2 + (2 - 3\sqrt{3})z - \sqrt{3} > 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Risolviamo la disequazione algebrica ottenuta risolvendo innanzi tutto l'equazione associata.

$$\begin{aligned} &6z^2 + (2 - 3\sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0 \\ &\qquad \Delta =(2 - 3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-\sqrt{3}) = \\ &\qquad\quad 4 - 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 + 24\sqrt{3} = \\ &\qquad\quad 4 - 12\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 + 24\sqrt{3} = \\ &\qquad\quad 4 + 12\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 = \\ &\qquad\quad (2 + 3\sqrt{3})^2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(2 - 3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(2 + 3\sqrt{3})^2}}{12} = \frac{-(2 - 3\sqrt{3}) \pm (2 + 3\sqrt{3})}{12} \\ z_1 &= \frac{-(2 - 3\sqrt{3}) + (2 + 3\sqrt{3})}{12} = \frac{-2 + 3\sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3}}{12} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \frac{-(2 - 3\sqrt{3}) - (2 + 3\sqrt{3})}{12} = \frac{-2 + 3\sqrt{3} - 2 - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.7}$$

La parabola associata alla disequazione di secondo grado ha la concavità verso l'altro e la positività è negli intervalli esterni.

$$z < -\frac{1}{3} \quad \vee \quad z > \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6.8}$$

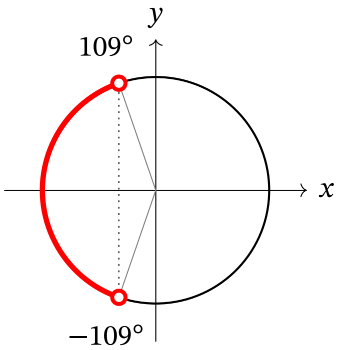
Risostituiamo alla variabile z la funzione goniometrica e risolviamo le due disequazioni elementari che otteniamo.

$$\textbf{I Disequazione} \qquad \cos x < \frac{1}{3} \tag{6.9}$$

Troviamo le soluzioni fondamentali dell'equazione associata con la calcolatrice:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq \pm 109° \tag{6.10}$$

Il coseno dato non è associato ad un angolo notevole. Possiamo trovare l'angolo corrispondente con la calcolatrice, ma si può tranquillamente lasciare indicato nella soluzione l'arcocoseno. Queste sono le due soluzioni base. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino vuoto dato che nella disequazione non è presente anche l'uguale.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il coseno dell'angolo *è minore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto *più a sinistra* dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.
Per indicare quell'arco non possiamo andare senza soluzione di continuità dal primo angolo al secondo. Se partiamo da 109° arriviamo a $360° - 109° = 251°$, cioè $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
Di conseguenza la soluzione relativa alla circonferenza goniometrica è:

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \tag{6.11}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione coseno possiamo scrivere:

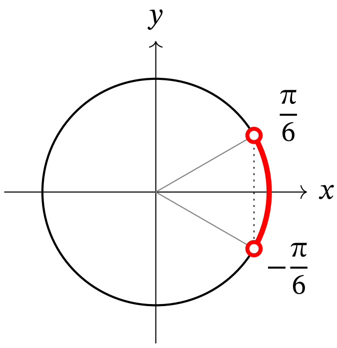
$$2k\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \tag{6.12}$$

$$\textbf{II Disequazione} \qquad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6.13}$$

Troviamo le soluzioni fondamentali dell'equazione associata con la calcolatrice o a mente:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq \pm\frac{\pi}{6} \tag{6.14}$$

Queste sono le due soluzioni base. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino vuoto dato che nella disequazione non è presente anche l'uguale.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il coseno dell'angolo *è maggiore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto *più a destra* dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.
Per indicare quell'arco non possiamo andare senza soluzione di continuità dal primo angolo al secondo, ma dal secondo al primo. La soluzione relativa alla circonferenza goniometrica è:

$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \tag{6.15}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione seno possiamo scrivere:

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \tag{6.16}$$

Infine.
La soluzione finale è *l'unione* delle due soluzioni trovate quindi possiamo scrivere:

$$2k\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \quad \vee \quad 2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \tag{6.17}$$

7 Forme risolubili con formule goniometriche

Mediante le formule di trasformazione goniometriche possiamo, in alcuni casi, trasformare alcune espressioni presenti in una equazione: in questa maniera possiamo cercare di ricondurre tale equazione ad una notevole.

I casi possibili sono innumerevoli, anche considerando quante formule di trasformazione studiamo tradizionalmente. In questa sezione ci limitiamo a dare qualche esempio.

Esercizio 17 *Risolvi la seguente equazione* $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Ricordiamo la formula di bisezione per il seno e il suo quadrato.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2} \tag{7.1}$$

Possiamo sostituire l'ultima espressione al posto del quadrato del seno che compare nell'equazione.

$$\begin{aligned} &\frac{1-\cos(x)}{2} = \frac{1}{2} \\ &1-\cos(x) = 1 \\ &\cos(x) = 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

L'ultima equazioni ha immediatamente come soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{7.3}$$

In alternativa

Senza ricorrere alle formule di bisezione osserviamo che l'equazione di partenza può essere risolta per sostituzione dell'argomento della funzione seno, sia riconducendola ad una equazione algebrica con l'intera sostituzione della funzione seno.

Se chiamiamo $z = \frac{x}{2}$ l'equazione diventa:

$$\sin^2(z) = \frac{1}{2} \tag{7.4}$$

Ora chiamiamo $t = \sin(z)$.

$$t^2 = \frac{1}{2} \tag{7.5}$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono:

$$t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7.6}$$

Sostituendo a ritroso diventano:

$$\sin(z) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7.7}$$

Sono due equazioni elementari in seno. Risolviamole una alla volta.

$$\textbf{I} \qquad \sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7.8}$$

La soluzione fondamentale è:

$$z_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \tag{7.9}$$

E la seconda soluzione:

$$z_2 = \pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \tag{7.10}$$

Infine la soluzione generale è:

$$z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad z_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \tag{7.11}$$

$$\textbf{II} \qquad \sin(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7.12}$$

La soluzione fondamentale è:

$$z_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \tag{7.13}$$

E la seconda soluzione:

$$z_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4} \tag{7.14}$$

Infine la soluzione generale è:

$$z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad z_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \tag{7.15}$$

Le quattro soluzioni ottenute partono da $\frac{\pi}{4}$ e sono distanziate di $\frac{\pi}{2}$.
Le possiamo complessivamente scrivere come:

$$z = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \tag{7.16}$$

A questo punto possiamo ritornare alla x.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned} \tag{7.17}$$

Abbiamo riottenuto la stessa soluzione ottenuta col metodo precedente, ma con molti passaggi in più.

8 Equazioni lineari

Le equazioni lineari hanno la seguente forma generale:

$$a\sin(x) + b\cos(x) + c = 0 \tag{8.1}$$

dove a, b e c sono numeri reali.

8.1 Equazione lineare omogenea

Se il parametro c è nullo abbiamo la forma detta *lineare omogenea*:

$$a\sin(x) + b\cos(x) = 0 \tag{8.2}$$

con a e b entrambi reali e diversi da zero.

La soluzione consiste nel dividere tutta l'espressione per $\cos(x)$ trasformando l'equazione in una equazione elementare in tangente.

$$a\tan(x) + b = 0 \tag{8.3}$$

La divisione per il coseno non pone problemi perché se l'angolo rende nullo il valore del coseno allora i coefficienti non possono essere entrambi diversi da zero e l'equazione non è più lineare.

Esercizio 18 *Risolvi la seguente equazione* $4\sin(x) - 4\cos(x) = 0$

Dividiamo tutto per il coseno.

$$\begin{aligned} 4\tan(x) - 4 &= 0 \\ \tan(x) &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Risolviamo l'equazione elementare in tangente.

$$x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \tag{8.5}$$

Infine la soluzione generale è:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \tag{8.6}$$

8.2 Equazione lineare completa con le formule parametriche

Esistono diversi metodi per risolvere le equazioni lineari. Illustriamo qui di seguito il metodo che fa uso delle formule parametriche e di seguito quello geometrico.

Il metodo con le formule parametriche consiste nel trasformare l'equazione lineare goniometrica in una equazione algebrica e infine in una o due equazioni elementari in tangente.

- Verifichiamo se $x = \pi$ è una soluzione dell'equazione.
  Questa soluzione non può essere trovata con le formule parametriche e deve essere cercata espressamente.
- Sostituiamo al seno e coseno le loro espressioni con le formule parametriche e trasformiamo l'equazione in una equazione algebrica in t.

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{8.7}$$

  Il denominatore dell'equazione risultante è sicuramente diverso da zero in quanto $1+t^2$ è sicuramente diverso da zero.
- Risolviamo l'equazione algebrica in t.
- Dalle soluzioni in t otteniamo una o due equazioni in tangente: le risolviamo e abbiamo concluso.

Esercizio 19 *Risolvi la seguente equazione* $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) + 1 = 0$

- Cominciamo verificando se $x = \pi$ è soluzione dell'equazione data.

$$\begin{aligned} \sin(\pi) - \sqrt{3}\cos(\pi) + 1 &= \\ 0 - \sqrt{3}\cdot(-1) + 1 &\neq 0 \end{aligned} \tag{8.8}$$

  Non è soluzione.
- Sostituiamo al seno e coseno le loro espressioni con le formule parametriche.

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2} + 1 &= 0 \\ \frac{2t - \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2 + 1 + t^2}{1+t^2} &= 0 \\ t^2(1+\sqrt{3}) + 2t + 1 - \sqrt{3} &= 0 \end{aligned} \tag{8.9}$$

- Risolviamo l'equazione algebrica in t.

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}}{2(1+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1-3)}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} = -1 \\ t_2 &= \frac{-1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} = \frac{(-1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{(1-3} = \frac{-4+2\sqrt{3}}{-2} = 2-\sqrt{3} \end{aligned} \tag{8.11}$$

- Prima equazione nella tangente.

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= -1 \quad ; \quad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{x}{2} &= -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \tag{8.12}$$

Seconda equazione nella tangente.

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= 2-\sqrt{3} \quad ; \quad \arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \tag{8.13}$$

La soluzione complessiva è l'unione delle due soluzioni.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \tag{8.14}$$

8.3 Equazione lineare completa col metodo grafico

Quale che sia l'espressione goniometrica che abbiamo vale sempre la prima relazione fondamentale della goniometria. Mettendo a sistema l'equazione lineare con tale relazione possiamo trasformare la soluzione dell'equazione nel problema geometrico di trovare l'intersezione tra una circonferenza e una retta.

$$\begin{cases} a\sin(x) + b\cos(x) + c = 0 \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \end{cases} \tag{8.15}$$

Facciamo un cambio di variabile e riscriviamo il sistema dato.

$$Y = \sin(x) \quad ; \quad X = \cos(x) \tag{8.16}$$

$$\begin{cases} Y^2 + X^2 = 1 \\ aY + bX + c = 0 \end{cases} \tag{8.17}$$

Risolvendo l'ultimo sistema otteniamo due equazioni elementari in seno e coseno: da esse troviamo gli angoli soluzione dell'equazione lineare.

Esercizio 20 *Risolvi la seguente equazione* $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) + 1 = 0$

Facciamo un cambio di variabile e scriviamo il sistema costituito dalla nostra equazione di partenza e dalla prima relazione fondamentale della goniometria.

$$Y = \sin(x) \quad ; \quad X = \cos(x) \tag{8.18}$$

$$\begin{cases} Y^2 + X^2 = 1 \\ Y - \sqrt{3}X + 1 = 0 \end{cases} \tag{8.19}$$

Mettiamo in evidenza Y nella seconda e sostituiamolo nella prima.

$$\begin{aligned} &Y = \sqrt{3}X - 1 \\ &\quad (\sqrt{3}X - 1)^2 + X^2 - 1 = 0 \\ &\quad 3X^2 - 2\sqrt{3}X + 1 + X^2 - 1 = 0 \\ &\quad 4X^2 - 2\sqrt{3}X = 0 \\ &\quad 2X(2X - \sqrt{3}) = 0 \end{aligned} \tag{8.20}$$

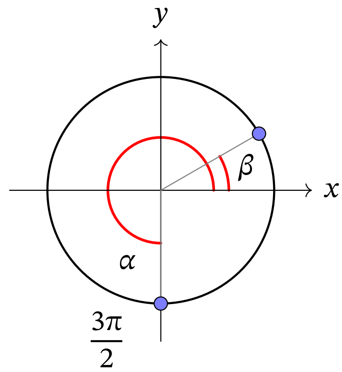
$$X_1 = 0 \quad ; \quad X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{8.21}$$

$$Y_1 = \sqrt{3}X_1 - 1 = -1 \quad ; \quad Y_2 = \sqrt{3}X_2 - 1 = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \tag{8.22}$$

I punti trovati hanno coordinate:

$$P_1(0, -1) \quad ; \quad P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{8.23}$$

Li riportiamo nella circonferenza goniometrica.



Il primo punto è legato all'angolo α che chiaramente vale $\frac{3\pi}{2}$.

Per trovare il valore del secondo punto risolviamo una delle due equazioni seguenti

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \tag{8.24}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \tag{8.25}$$

Infine le soluzioni dell'equazione lineare sono:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \tag{8.26}$$

Il primo punto indicato nella soluzione con le formule parametriche è chiaramente un'espressione diversa dello stesso angolo.

9 Disequazioni lineari

Le disequazioni lineari hanno la seguente forma generale:

$$a\sin(x) + b\cos(x) + c \lesseqgtr 0 \tag{9.1}$$

dove a, b e c sono numeri reali.

Al contrario delle equazioni non usiamo distinguere tra la forma lineare omogenea e quella completa.

9.1 Disequazione lineare con le formule parametriche

Esistono diversi metodi per risolvere le equazioni lineari. Illustriamo qui di seguito il metodo che fa uso delle formule parametriche e di seguito quello geometrico.

La differenza con il metodo che abbiamo usato per le equazioni è che qui dobbiamo *necessariamente* fare il grafico delle soluzioni delle due disequazioni nella tangente per poterne poi fare l'intersezione o l'unione nel passaggio finale.

- Verifichiamo se $x = \pi$ è una soluzione dell'equazione.
  Questa soluzione non può essere trovata con le formule parametriche e deve essere cercata espressamente.
- Sostituiamo al seno e coseno le loro espressioni con le formule parametriche e trasformiamo la disequazione in una disequazione algebrica in t.

  $$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{9.2}$$

  Il denominatore dell'equazione risultante è sicuramente diverso da zero e positivo in quanto $1+t^2$ è sicuramente diverso da zero e positivo. Per cui non è necessario studiarne il segno.
- Risolviamo la disequazione algebrica risultante.
- Dalle soluzioni in t otteniamo in generale due disequazioni nella tangente: le risolviamo, ma ci limitiamo a disegnare la soluzione in $\frac{x}{2}$ senza scrivere la soluzione per via analitica.
- Facciamo l'opportuna intersezione o unione delle due soluzioni e solo allora scriviamo per via analitica la soluzione finale in x.

Esercizio 21 *Risolvi la seguente equazione* $2\sin(x) + 2\cos(x) - \sqrt{3} - 1 > 0$

- Cominciamo verificando se $x = \pi$ è soluzione dell'equazione data.

$$\begin{aligned} 2\sin(\pi) + 2\cos(\pi) - \sqrt{3} - 1 &= \\ 0 + 2\cdot(-1) - \sqrt{3} - 1 &= \\ 0 - 3 - \sqrt{3} &< 0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

  Non è soluzione.

- Sostituiamo al seno e coseno le loro espressioni con le formule parametriche.

$$\begin{aligned} \frac{2\cdot 2t}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - \sqrt{3} - 1 &> 0 \\ \frac{4t + 2 - 2t^2 - \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}t^2 - t^2}{1+t^2} &> 0 \\ t^2(-3-\sqrt{3}) + 4t + 1 - \sqrt{3} &> 0 \end{aligned} \tag{9.4}$$

- Risolviamo l'equazione algebrica in t associata alla disequazione.

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-3-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}}{2(-3-\sqrt{3})} = \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12 - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 12}}{-2(3+\sqrt{3})} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8\sqrt{3}}}{-2(3+\sqrt{3})} \end{aligned} \tag{9.5}$$

  Per riuscire a risolvere la radice osserviamo che:

$$16 - 8\sqrt{3} = 4(4 - 2\sqrt{3}) = 4(1 - 2\sqrt{3} + 3) = 2^2(1-\sqrt{3})^2 \tag{9.6}$$

  Per cui:

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2^2(1-\sqrt{3})^2}}{-2(3+\sqrt{3})} = \frac{-4 \pm 2(1-\sqrt{3})}{-2(3+\sqrt{3})} = \frac{2 \pm (1-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2 - 1 + \sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3 + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3}{9-3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t_2 &= \frac{2 + 1 - \sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})} = \frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{(9-3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned} \tag{9.8}$$

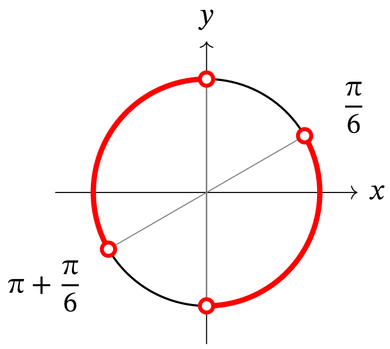
- La disequazione è legata ad un parabola con la concavità verso il basso ($a < 0$) per cui la negatività si trova nell'intervallo interno.

$$2 - \sqrt{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{9.9}$$

- Prima disequazione nella tangente.

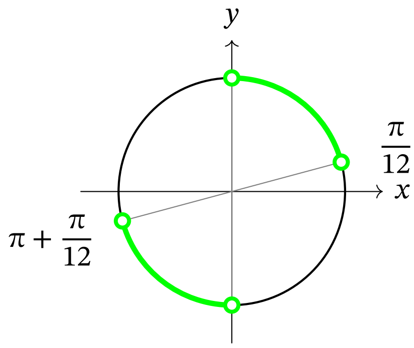
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \tag{9.10}$$

Rappresentiamo la la soluzione in $x/2$ per via grafica.

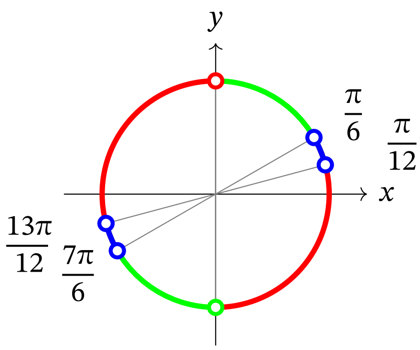


Seconda disequazione nella tangente.

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) > 2-\sqrt{3} \quad ; \quad \arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12} \tag{9.11}$$



La soluzione complessiva è l'intersezione delle due soluzioni ovvero il grafico comune ai due grafici precedenti, lo segniamo in blu.



I due intervalli in blu sono distanziati di un angolo π e sono sostanzialmente identici per la periodicità della funzione tangente. Per esprimere la soluzione finale prendiamo solo un intervallo. Infine sviluppiamo l'espressione ottenuta per mettere in evidenza la x.

$$k\pi + \frac{\pi}{12} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \tag{9.12}$$

9.2 Disequazione lineare col metodo grafico

Quale che sia l'espressione goniometrica che abbiamo vale sempre la prima relazione fondamentale della goniometria. Mettendo a sistema la disequazione lineare con tale relazione possiamo trasformare la soluzione dell'equazione nel problema geometrico di trovare l'intersezione tra una circonferenza e un semipiano.

$$\begin{cases} a\sin(x) + b\cos(x) + c \lesseqgtr 0 \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \end{cases} \tag{9.13}$$

Facciamo un cambio di variabile e riscriviamo il sistema dato.

$$Y = \sin(x) \quad ; \quad X = \cos(x) \tag{9.14}$$

$$\begin{cases} Y^2 + X^2 = 1 \\ aY + bX + c \lesseqgtr 0 \end{cases} \tag{9.15}$$

Prima risolviamo il problema come se fosse solo un'equazione.
Una volta trovati sulla circonferenza i punti associati alle soluzioni rappresentiamo il semipiano associato alla disequazione lineare.
L'intersezione del semipiano con la circonferenza goniometrica ci dà gli archi soluzione della disequazione.

Esercizio 22 *Risolvi la seguente equazione* $2\sin(x) + 2\cos(x) - \sqrt{3} - 1 > 0$

Facciamo un cambio di variabile e scriviamo il sistema costituito dalla nostra equazione di partenza e dalla prima relazione fondamentale della goniometria.

$$Y = \sin(x) \quad ; \quad X = \cos(x) \tag{9.16}$$

$$\begin{cases} Y^2 + X^2 = 1 \\ 2Y + 2X - \sqrt{3} - 1 > 0 \end{cases} \tag{9.17}$$

Trattiamo la disequazione come fosse un'equazione e mettiamo in evidenza Y nella seconda e sostituiamolo nella prima.

$$\begin{aligned} & Y = -X + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ & \left(-X + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + X^2 - 1 = 0 \\ & X^2 - (\sqrt{3}+1)X + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} + X^2 - 1 = 0 \\ & 4X^2 - 4(\sqrt{3}+1)X + (3 + 2\sqrt{3} + 1) + 4X^2 - 4 = 0 \\ & 8X^2 - 4(\sqrt{3}+1)X + 2\sqrt{3} = 0 \end{aligned} \tag{9.18}$$

$$
\begin{aligned}
X_{1,2} = \frac{4(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{(4^2(\sqrt{3}+1)^2 - 4\cdot 8\cdot 2\sqrt{3}}}{2\cdot 8} = \\
\frac{4(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{4^2[(\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3}]}}{4\cdot 4} \\
\frac{4(\sqrt{3}+1) \pm 4\sqrt{3+2\sqrt{3}+1-4\sqrt{3}}}{4\cdot 4} \\
\frac{(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{4} \\
\frac{(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4} \\
\frac{(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4}
\end{aligned}
\tag{9.19}
$$

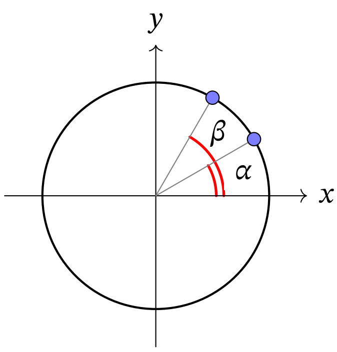
$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
X_2 &= \frac{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{9.20}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{2} \\
Y_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

I punti trovati hanno coordinate:

$$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{9.22}$$

Li riportiamo nella circonferenza goniometrica.



Per trovare il valore del primo punto risolviamo una delle due equazioni seguenti

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \tag{9.23}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \tag{9.24}$$

Per trovare il valore del secondo punto risolviamo una delle due equazioni seguenti

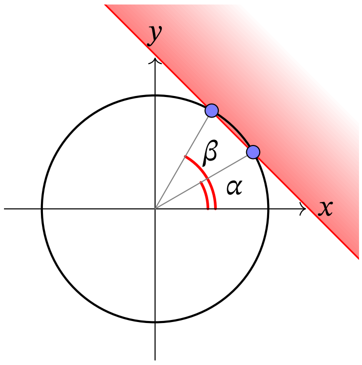
$$\cos(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{9.25}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{9.26}$$

Adesso possiamo tornare alla disequazione di partenza.

$$\begin{aligned} &2Y + 2X - \sqrt{3} - 1 > 0 \\ &Y > -X + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{aligned} \tag{9.27}$$

Essa rappresenta un semipiano passante per i due punti che abbiamo trovato. Lo rappresentiamo con una sfumatura di rosso nella figura seguente



Infine l'intervallo soluzione della disequazione lineare goniometrica è dato dall'intersezione della circonferenza goniometrica con quel semipiano. Quindi le soluzioni della disequazione lineare sono:

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \tag{9.28}$$

10 Equazioni omogenee di secondo grado

Le equazioni goniometriche omogenee di secondo grado hanno la forma di una somma i cui addendi sono tutte funzioni di secondo grado in seno o coseno.

La **forma completa** ha i coefficienti a, b e c tutti diversi da zero:

$$a\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) = 0 \tag{10.1}$$

Si può dimostrare che in tale forma $\cos(x)$ è sempre diverso da zero: per cui possiamo dividere tutta l'equazione per $\cos^2(x)$ trasformandola in una equazione riconducibile ad algebrica in tangente.

$$a\tan^2(x) + b\tan(x) + c = 0 \tag{10.2}$$

La **forma incompleta** ha il coefficiente a o c uguale a zero:

$$b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) = 0 \quad ; \quad a\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) = 0 \tag{10.3}$$

Possiamo risolverle mettendo in evidenza il fattore comune e trasformandole nel prodotto di una funzione elementare per una lineare.

$$\cos(x)(b\sin(x) + c\cos(x)) = 0 \quad ; \quad \sin(x)(a\sin(x) + b\cos(x)) = 0 \tag{10.4}$$

Come **variante della forma completa** possiamo citare la seguente:

$$a\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) = d \tag{10.5}$$

dove il coefficiente d può essere moltiplicato per la prima relazione fondamentale della goniometria ($1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$) e portato al primo membro. L'equazione può quindi assumere la forma completa sopra illustrata.

$$(a-d)\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + (c-d)\cos^2(x) = 0 \tag{10.6}$$

Esercizio 23 *Risolvi la seguente equazione:* $\sin^2(x) - \sqrt{3}\sin(x)\cos(x) = 0$

É una equazione omogenea di secondo grado incompleta: mettiamo in evidenza $\sin(x)$.

$$\sin(x)(\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)) = 0 \tag{10.7}$$

Abbiamo una equazione scomposta in fattori: applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto e risolviamo le due equazioni risultanti.

I fattore

$$\sin(x) = 0 \tag{10.8}$$

Possiamo scrivere immediatamente la soluzione.

$$x = k\pi \tag{10.9}$$

II fattore

$$\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0 \tag{10.10}$$

É una equazione lineare incompleta: dividiamo tutto per $\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \tan(x) - \sqrt{3} &= 0 \\ \tan(x) &= \sqrt{3} \\ x = \arctan\sqrt{3} &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \tag{10.11}$$

La soluzione generale è:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \tag{10.12}$$

Infine la soluzione dell'equazione omogenea è l'unione delle soluzioni ottenute.

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \tag{10.13}$$

Esercizio 24 *Risolvi la seguente equazione:* $\sin^2(x) + (1-\sqrt{2})\sin(x)\cos(x) - \sqrt{2}\cos^2(x) = 0$

É una equazione omogenea di secondo grado completa: dividiamo tutto per $\cos^2(x)$.

$$\tan^2(x) + (1-\sqrt{2})\tan(x) - \sqrt{2} = 0 \tag{10.14}$$

É un equazione riconducibile ad algebrica in $\tan(x)$.
Possiamo procedere con un cambio di variabile.

$$\begin{aligned} &z = \tan(x) \\ &z^2 + (1-\sqrt{2})z - \sqrt{2} = 0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

Risolviamo l'equazione algebrica ottenuta.

$$\begin{aligned} z^2 + (1-\sqrt{2})z - \sqrt{2} = 0 & \\ \Delta = & (1-\sqrt{2})^2 - 4\cdot 1\cdot(-\sqrt{2}) = \\ & 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} = \\ & 1 + 2\sqrt{2} + 2 = \\ & 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = \\ & (1+\sqrt{2})^2 \end{aligned} \tag{10.16}$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(1-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{-(1-\sqrt{2}) \pm (1+\sqrt{2})}{2} \\ z_1 &= \frac{-(1-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ z_2 &= \frac{-(1-\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2})}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{aligned} \tag{10.17}$$

Risostituiamo a z il suo valore.

I equazione

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \sqrt{2} \\ x &= \arctan\sqrt{2} \quad (\simeq 54°) \\ x &= \arctan\sqrt{2} + k\pi \end{aligned} \tag{10.18}$$

II equazione

$$\begin{aligned} \tan(x) &= -1 \\ x = \arctan(-1) &= -\frac{\pi}{4} \\ x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \tag{10.19}$$

Infine la soluzione dell'equazione omogenea è l'unione delle soluzioni ottenute.

$$x = \arctan\sqrt{2} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \tag{10.20}$$

11 Disequazioni omogenee di secondo grado

Le disequazioni goniometriche omogenee di secondo grado hanno la forma di una somma i cui addendi sono tutte funzioni di secondo grado in seno o coseno.

La **forma completa** ha i coefficienti a, b e c tutti diversi da zero:

$$a\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) \lesseqgtr 0 \tag{11.1}$$

Al contrario delle equazioni $\cos(x)$ non è sempre diverso da zero.
Di conseguenza *prima* verifichiamo se è presente la soluzione $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, associata alla nullità della funzione coseno.
Poi dividiamo tutta l'espressione per $\cos^2(x)$ (che è sempre positivo), trasformandola in una disequazione riconducibile ad algebrica in tangente.

$$a\tan^2(x) + b\tan(x) + c \lesseqgtr 0 \tag{11.2}$$

La soluzione finale è l'unione dei due insiemi di soluzioni.

La **forma incompleta** ha il coefficiente a o c uguale a zero:

$$b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) \lesseqgtr 0 \quad ; \quad a\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) \lesseqgtr 0 \tag{11.3}$$

Come per l'analoga equazione possiamo risolverle mettendo in evidenza il fattore comune e trasformandole nel prodotto di una funzione elementare per una lineare: avremo una disequazione della forma scomposta in fattori.

$$\cos(x)(b\sin(x) + c\cos(x)) \lesseqgtr 0 \quad ; \quad \sin(x)(a\sin(x) + b\cos(x)) \lesseqgtr 0 \tag{11.4}$$

Oppure risolviamo la disequazione senza scomporla in fattori, dal momento che può risultare meno laborioso risolvere un'unica disequazione in $\tan x$ piuttosto che la disequazione prodotto di due fattori.

Inoltre può essere presente nella disequazione anche un termine d di grado zero. Questo coefficiente d può essere moltiplicato per la prima relazione fondamentale della goniometria ($1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$), riconducendo la disequazione alle due forme prima presentate.

Esercizio 25 *Risolvi la seguente disequazione:* $5\sin^2(x) + 10\sin(x)\cos(x) - 15\cos^2(x) \le 0$

É una disequazione omogenea di secondo grado completa: controlliamo per prima cosa se è presente la soluzione $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$$\begin{aligned} 5\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + 10\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - 15\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) &\le 0 \\ 5\cdot 1 + 10\cdot 1\cdot 0 - 15\cdot 0 &\le 0 \\ 5 &\le 0 \end{aligned} \tag{11.5}$$

La disequazione *non è soddisfatta* quindi non è presente *anche* questa soluzione.
Ora possiamo dividere tutto per $\cos^2(x)$.

$$5\tan^2(x) + 10\tan(x) - 15 \le 0 \tag{11.6}$$

É una disequazione riconducibile ad algebrica in $\tan(x)$.
Possiamo procedere con un cambio di variabile.

$$\begin{aligned} &z = \tan(x) \\ &5z^2 + 10z - 15 \le 0 \end{aligned} \tag{11.7}$$

Risolviamo l'equazione algebrica associata ottenuta.

$$\begin{aligned} &5z^2 + 10z - 15 = 0 \\ z_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(5)(-15)}}{2} = \frac{-10 \pm 20}{10} = -1 \pm 2 \\ z_1 &= -1 + 2 = 1 \quad ; \quad z_2 = -1 - 2 = -3 \end{aligned} \tag{11.8}$$

La disequazione è associata ad una parabola con concavità verso l'alto: l'intervallo di negatività è quello interno.

$$-3 \le z \le 1 \tag{11.9}$$

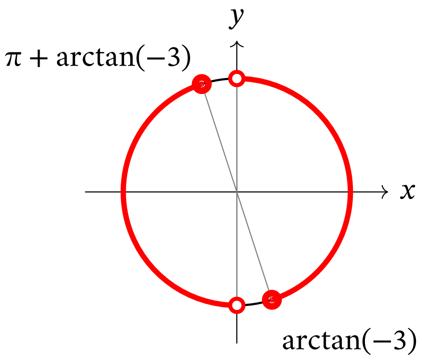
Risostituiamo a z il suo valore e otteniamo due disequazioni nella $\tan(x)$. Le risolviamo solo graficamente: in questo tipo di disequazione conviene scrivere la soluzione analitica solo nell'ultimo passaggio.

I disequazione: $\tan(x) \geq -3$

Troviamo la soluzione fondamentale della disequazione

$$x = \arctan(-3) \quad (\simeq -72°) \tag{11.10}$$

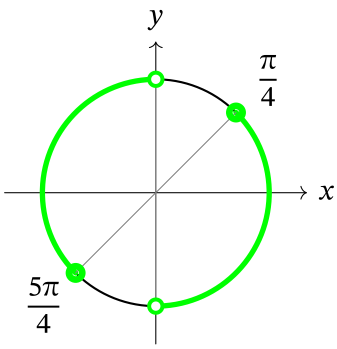
Ricordiamoci che la tangente ha periodo π e nella circonferenza goniometrica sono presenti due angoli, separati di π, che hanno la stessa tangente.



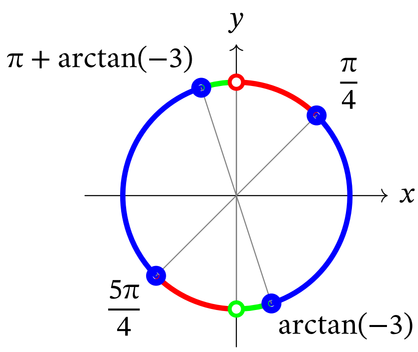
II disequazione: $\tan(x) \leq 1$

Troviamo la soluzione fondamentale della disequazione

$$x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \tag{11.11}$$



Infine la soluzione della disequazione omogenea è l'intersezione delle due soluzioni parziali ottenute.



I due intervalli in blu rappresentano la soluzione: sono distanziati di un un angolo π per la periodicità della funzione tangente.
Ne prendiamo uno a nostro piacimento come soluzione fondamentale.

$$\arctan(-3) + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \tag{11.12}$$

12 Equazioni scomposte in fattori

Le equazioni goniometriche scomposte in fattori seguono la stessa logica di una qualsiasi equazione di tale forma.

Per la legge dell'annullamento del prodotto l'espressione che abbiamo equivale a tante espressioni eguagliate a zero, tante quanti sono i fattori della nostra espressione di partenza. Ognuna di esse diventa una distinta equazione goniometrica o meno che andrà risolta separatamente.

Mai moltiplicare i fattori tra di loro: il risultato è un'equazione più complessa di quella di partenza.

Esercizio 26 *Risolvi la seguente equazione:* $4(3\cos x - 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

Abbiamo tre fattori: il quattro ovviamente va lasciato a parte.
La prima equazione è:

$$3\cos x - 1 = 0 \tag{12.1}$$

Questa è un'equazione elementare in x: la risolviamo immediatamente.

$$\begin{gathered}\cos x = \frac{1}{3} \\ x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi\end{gathered} \tag{12.2}$$

La seconda è un'altra equazione elementare in x.

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \tag{12.3}$$

$$\begin{gathered}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_1 = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\end{gathered} \tag{12.4}$$

Infine la soluzione complessiva dell'equazione è l'unione delle soluzioni ottenute.

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \tag{12.5}$$

13 Equazioni fratte

Le equazioni goniometriche fratte seguono la stessa logica di una qualsiasi equazione fratta.

- Dobbiamo innanzi tutto stabilire le condizioni di esistenza: prima di qualsiasi altro passaggio algebrico o semplificazione dobbiamo imporre che le espressioni a denominatore siano tutte diverse da zero e in più che tutte le funzioni goniometriche date siano all'interno del loro campo di esistenza.
- Dobbiamo poi portare tutti gli addendi a uno stesso membro e ridurre l'espressione a una stessa frazione.
- A questo punto risolviamo l'equazione che risulta dall'annullamento del numeratore dell'unica espressione fratta rimasta.
- Togliamo dalle soluzioni gli eventuali punti o intervalli dati dalle condizioni di esistenza.

Esercizio 27 *Risolvi la seguente equazione:* $\dfrac{4}{\cos(x)} = \dfrac{3\cos(x)}{\sin(x)+1}$

- Imponiamo le condizioni di esistenza delle frazioni.

$$\begin{aligned} \cos(x) &\neq 0 \\ x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned} \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) + 1 &\neq 0 \\ \sin(x) &\neq -1 \\ x &\neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \tag{13.2}$$

- Portiamo tutto a primo membro e riduciamo ad una stessa frazione.

$$\begin{aligned} \frac{4}{\cos(x)} - \frac{3\cos(x)}{\sin(x)+1} &= 0 \\ \frac{4(\sin(x)+1) - 3\cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} &= 0 \end{aligned} \tag{13.3}$$

- Per cui l'equazione risultante, non più fratta, è:

$$4(\sin(x)+1) - 3\cos^2(x) = 0 \tag{13.4}$$

L'equazione che abbiamo ottenuto non è elementare.
Trasformiamo il coseno in seno con la prima relazione fondamentale della goniometria.

$$\begin{aligned} &4(\sin(x)+1)-3(1-\sin^2(x))=0 \\ &4\sin(x)+4-3+3\sin^2(x)=0 \\ &3\sin^2(x)+4\sin(x)+1=0 \end{aligned} \tag{13.5}$$

Possiamo risolvere l'equazione trasformandola in una algebrica con la posizione $z=\sin(x)$

$$\begin{aligned} &3z^2+4z+1=0 \\ &z_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot 1}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-4\pm 2}{6}=\frac{-2\pm 1}{3} \end{aligned} \tag{13.6}$$

$$z_1=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3} \qquad ; \qquad z_2=\frac{-2-1}{3}=-1 \tag{13.7}$$

Prima equazione elementare associata.

$$\begin{aligned} \sin(x)&=-\frac{1}{3} \\ x_1&=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi \\ x_2&=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi \end{aligned} \tag{13.8}$$

Seconda equazione elementare associata.

$$\begin{aligned} \sin(x)&=-1 \\ x_3&=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \end{aligned} \tag{13.9}$$

- Infine togliamo dalle soluzioni quelle indicate dalle C.E. ; in particolare il terzo insieme di soluzioni ottenuto non è soluzione dell'equazione di partenza.

  La soluzione finale è:

$$x=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi \quad\vee\quad x=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi \tag{13.10}$$

14 Disequazioni scomposte in fattori o fratte

Le disequazioni goniometriche scomposte in fattori o fratte seguono la stessa logica di una qualsiasi disequazione scomposta in fattori o fratta. Tuttavia, a causa delle periodicità delle funzioni goniometriche, in generale non è possibile indicare in modo chiaro quale sia la soluzione finale della disequazione.

- Dobbiamo innanzi tutto stabilire le condizioni di esistenza: prima di qualsiasi altro passaggio algebrico o semplificazione dobbiamo imporre che tutte le funzioni goniometriche date siano all'interno del loro campo di esistenza e che le espressioni a denominatore siano tutte diverse da zero.
- Se abbiamo la sola disequazione fratta dobbiamo poi portare tutti gli addendi a uno stesso membro e ridurre l'espressione a una stessa frazione.
- A questo punto studiamo il segno o dei fattori o del numeratore e denominatore dell'unica espressione fratta rimasta. Ricorda che è sempre meglio studiare la positività a prescindere dal segno della disequazione.
- Studiamo la composizione dei segni dei fattori o del numeratore e del denominatore. Incontriamo almeno tre possibilità:
  1. Il periodo della soluzione relativa a queste espressioni è 2π o un sottomultiplo intero di 2π.
     In questo caso possiamo rappresentare il segno delle espressioni su cerchi concentrici o in linea su un tratto lungo 2π.
  2. I periodi delle soluzioni relative alle espressioni hanno un minimo comune multiplo diverso da 2π.
     In questo caso possiamo rappresentare il segno delle espressioni solo in linea per un intervallo pari al m.c.m. dei due periodi.
  3. I periodi delle soluzioni relative alle espressioni non sono commensurabili.
     In questo caso possiamo rappresentare il segno delle espressioni solo in linea e solo per un intervallo dato, ma non riusciremo a scrivere la soluzione su tutto l'asse reale.
- Togliamo dalle soluzioni gli eventuali punti o intervalli dati dalle condizioni di esistenza.

14.1 Primo Caso

Esercizio 28 *Risolvi la seguente disequazione* $\dfrac{2\sin(x)-1}{\cos(x)} \leq 0$

- Imponiamo le condizioni di esistenza della frazione imponendo che il denominatore sia diverso da zero .

$$\begin{aligned} \cos(x) &\neq 0 \\ x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned} \tag{14.1}$$

- **Studio del segno del numeratore**.

$$\begin{aligned} 2\sin(x) - 1 &\geq 0 \\ \sin(x) &\geq \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{14.2}$$

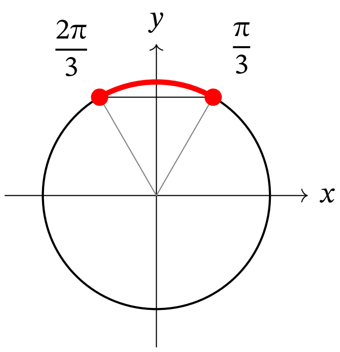
Troviamo la soluzione fondamentale a mente o con la calcolatrice:

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{14.3}$$

E la seconda soluzione:

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \tag{14.4}$$

Queste sono le due soluzioni base. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino pieno dato che nella disequazione è presente anche l'uguale.

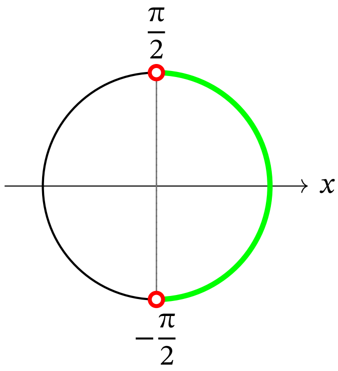


Non scriviamo la soluzione analitica di questa disequazione: per ora ci basta solo il disegno.

Studio del segno del denominatore.

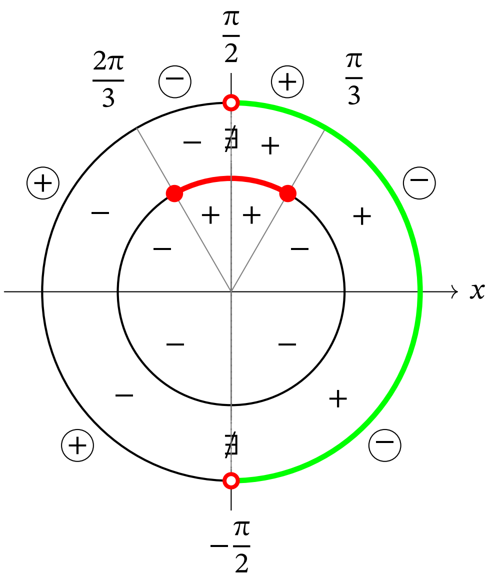
$$\cos(x) > 0 \tag{14.5}$$

Non mettiamo uguale a zero perché il denominatore non può essere mai uguale a zero. Rappresentiamo immediatamente la soluzione di questa disequazione con una linea continua terminante con un pallino vuoto dato che nella disequazione non è presente l'uguale.



Non scriviamo la soluzione analitica di questa disequazione: per ora ci basta solo il disegno.

- Componiamo i segni con due circonferenze concentriche nelle quali riportiamo i due intervalli. Dividiamo le due circonferenze negli stessi spicchi e scriviamo esplicitamente il segno di ogni spicchio. In quella esterna riportiamo tutti i punti significativi dei due studi del segno e i segni complessivi della frazione. Indichiamo esplicitamente anche i punti esclusi dalle condizioni di esistenza.



Infine la soluzione rappresentata (gli intervalli di negatività della frazione e i suoi zeri) è:

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2\pi}{3} \tag{14.6}$$

Considerando che il periodo sia della soluzione a numeratore che a denominatore è 2π possiamo scrivere:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \tag{14.7}$$

14.2 Secondo Caso

Esercizio 29 *Risolvi la seguente disequazione:* $\cos(3x - \pi)(2\sin(x) - 1) \geq 0$

- La disequazione ha la forma di un prodotto di fattori. Possiamo dire immediatamente che entrambi i fattori hanno come dominio tutti i numeri reali in quanto compaiono solo le funzioni goniometriche seno e coseno. Studiamo ora il segno di ciascun fattore.
- **Studio del segno I fattore**

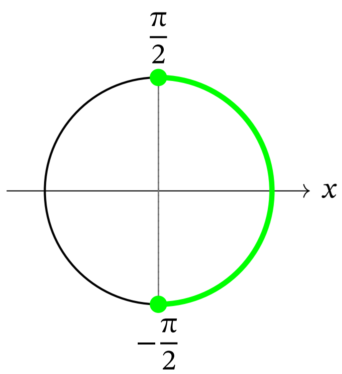
  Studiamo la positività dell'espressione come buona pratica: il segno della disequazione in questo passaggio non ha alcuna rilevanza.

$$\cos(3x - \pi) \geq 0 \tag{14.8}$$

Abbiamo una disequazione riconducibile ad elementare tramite sostituzione.

$$\begin{aligned} 3x - \pi &= z \\ \cos(z) &\geq 0 \\ \cos(z) &= 0 \\ z &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned} \tag{14.9}$$

Quest'ultima equazione elementare, in quanto equazione in coseno, ha in generale due soluzioni fondamentali con periodo 2π. In questo caso le soluzioni si possono raccogliere nell'unica scritta, ma con periodo π.
Disegniamo adesso l'angolo soluzione della disequazione in z. Rappresentiamo immediatamente la soluzione di questa disequazione con una linea continua terminante con un pallino pieno dato che nella disequazione è presente l'uguale.



La soluzione della disequazione in z è:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq z \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{14.10}$$

Risostituiamo alla z l'espressione originale in x e mettiamo in evidenza questa variabile nelle due disequazioni che otteniamo.

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} + 2k\pi &\leq 3x - \pi \\ -\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi &\leq 3x \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi &\leq 3x \\ \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi &\leq x \end{aligned} \tag{14.11}$$

$$
\begin{aligned}
3x - \pi &\leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
3x &\leq \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
3x &\leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\
x &\leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi
\end{aligned}
\tag{14.12}
$$

Infine, riunendo le due relazioni:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \tag{14.13}$$

La soluzione ottenuta ha come periodo $\frac{2}{3}\pi$.

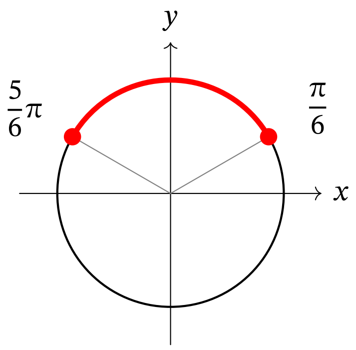
Studio del segno II fattore

$$2\sin(x) - 1 \geq 0 \tag{14.14}$$

Abbiamo una disequazione elementare in seno.

$$
\begin{gathered}
\sin(x) \geq \frac{1}{2} \\
\sin(x) = \frac{1}{2} \\
x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi
\end{gathered}
\tag{14.15}
$$

Disegniamo adesso gli angoli fondamentali dell'equazione associata e rappresentiamo la soluzione della disequazione con una linea continua terminante con un pallino pieno dato che nella disequazione è presente l'uguale.



Per cui la soluzione finale è:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \tag{14.16}$$

La soluzione ottenuta ha come periodo 2π.

- Il periodo della soluzione associata al primo fattore è $\frac{2}{3}\pi$ mentre quello della soluzione associata al denominatore è 2π. I due periodi sono comparabili. Possiamo rappresentarli contemporaneamente su una circonferenza goniometrica dato che $\frac{2}{3}\pi \cdot 3 = 2\pi$, ovvero il periodo del primo fattore è un sottomultiplo intero dell'angolo giro.

Per cui, a titolo esemplificativo, rappresentiamo le due soluzioni prima su due circonferenze concentriche e poi in linea, come un normale studio del segno.

Per rappresentare in un unico grafico il segno dei due fattori dobbiamo estendere l'intervallo del fattore con periodo più piccolo. In particolare dobbiamo trovare i nuovi angoli di riferimento del primo fattore per coprire tutto un intervallo che vada da 0 a 2π.

Primo sottointervallo ha $k = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{6} \\ \beta_0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{14.17}$$

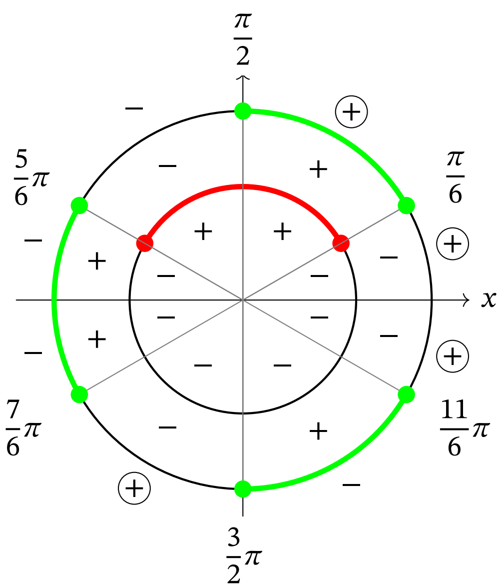
Secondo sottointervallo ha $k = 1$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{\pi + 4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \\ \beta_1 &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{3\pi + 4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \end{aligned} \tag{14.18}$$

Terzo sottointervallo ha $k = 2$.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{\pi + 8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \\ \beta_2 &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{3\pi + 8\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \end{aligned} \tag{14.19}$$

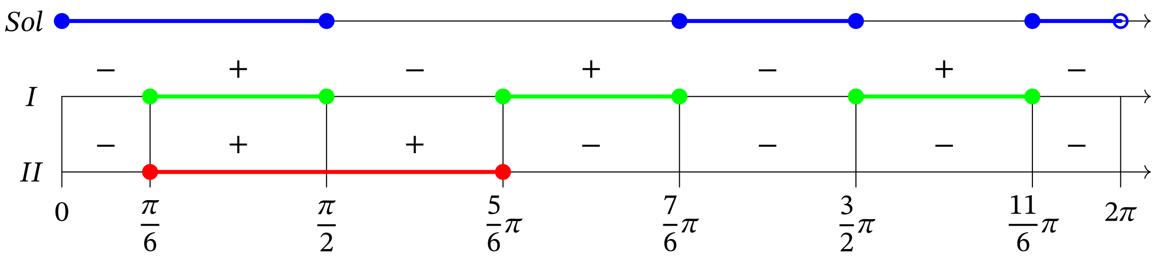
Abbiamo coperto tutto un angolo giro: possiamo rappresentare la soluzione dei due fattori con due circonferenze concentriche.



Infine, considerando che la disequazione di partenza ci chiedeva in quali intervalli il prodotto fosse positivo e che ora il periodo complessivo della soluzione finale è 2π, possiamo scrivere:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad 2k\pi + \frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2k\pi + \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi \tag{14.20}$$

Rappresentiamo lo studio del segno finale anche in linea, su due linee parallele.


Sol
I
II
−
+
−
+
−
+
−
−
+
+
−
−
−
−
0
π/6
π/2
5/6 π
7/6 π
3/2 π
11/6 π
2π

Esercizio 30 *Risolvi la seguente disequazione:* $\dfrac{2\tan(x)+2}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{2}} \leq 0$

- Imponiamo le condizioni di esistenza della frazione imponendo che il denominatore sia diverso da zero. Potremmo anche non scrivere l'equazione seguente, limitandoci a non studiare l'uguale a zero nello studio del segno del denominatore, ma se (come in questo caso) l'espressione non è elementare è facile non capire bene quali siano gli zeri da non considerare.

$$2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{2} \neq o$$
$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{14.21}$$

$$z = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$$
$$\sin(z) \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_1 \neq \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad z_2 \neq \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \tag{14.22}$$
$$z \neq \frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \wedge \quad z \neq \frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

Risostituiamo a z la sua espressione e risolviamo l'espressione ottenuta in funzione di x.

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$x+\pi \neq \frac{\pi}{2}+4k\pi \tag{14.23}$$
$$x \neq -\pi+\frac{\pi}{2}+4k\pi \quad ; \quad x \neq -\frac{\pi}{2}+4k\pi$$

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{4}+2k\pi$$
$$x+\pi \neq \frac{3\pi}{2}+4k\pi \tag{14.24}$$
$$x \neq -\pi+\frac{3\pi}{2}+4k\pi \quad ; \quad x \neq \frac{\pi}{2}+4k\pi$$

A tutto ciò dobbiamo aggiungere le condizioni di esistenza della tangente.

$$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \tag{14.25}$$

Le prime due condizioni sono contenute in quest'ultima e quindi la consideriamo l'unica espressione che le contiene tutte.

- **Studio del segno del numeratore.**

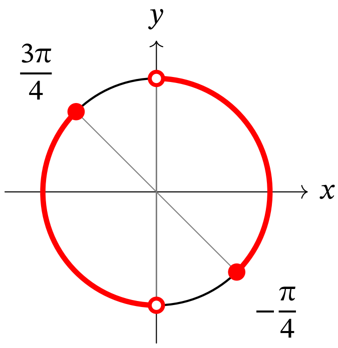
  Studiamo la positività come buona pratica, anche se potremmo studiare ugualmente la negatività dell'espressione.

$$\begin{aligned} 2\tan(x) + 2 &\geq 0 \\ \tan(x) &\geq -1 \end{aligned} \tag{14.26}$$

Troviamo la soluzione fondamentale dell'equazione associata, a mente o con la calcolatrice:

$$x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \tag{14.27}$$

Ricordiamoci che la tangente ha periodo π e nella circonferenza goniometrica sono presenti due angoli, separati di π, che hanno la stessa tangente. Per le condizioni di esistenza $\pi/2$ e $3\pi/2$ non sono compresi nelle soluzioni.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui la tangente dell'angolo *è maggiore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco che parte dall'angolo prima trovato $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e arriva fino a $\frac{\pi}{2}$ andando *in senso antiorario*. Questo riguarda la semicirconferenza che sta sulla destra; lo stesso arco si presenta, traslato di π, sulla semicirconferenza di sinistra. Questi sono i due archi segnati in rosso nella figura precedente.
Nello scrivere la soluzione finale consideriamo uno solo di quegli archi: quello di destra ad esempio.

$$-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \tag{14.28}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione tangente possiamo scrivere:

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{14.29}$$

Studio del segno del denominatore.

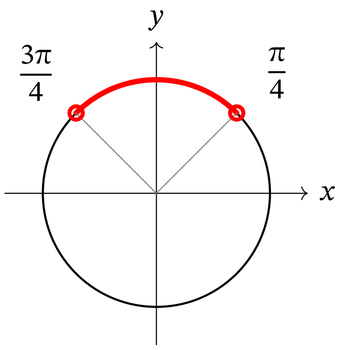
Per studiare il segno del denominatore riprendiamo gran parte dei calcoli già fatti per le condizioni di esistenza.

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2} &> o \\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) &> \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \tag{14.30}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \sin(z) &> \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \tag{14.31}$$

Consideriamo le soluzioni dell'equazione associata e rappresentiamole in una circonferenza con la soluzione della disequazione in z.

$$z_1 \neq \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad z_2 \neq \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \tag{14.32}$$



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il seno dell'angolo *è maggiore* di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto *più in alto* dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.
Per indicare quell'arco possiamo andare senza soluzione di continuità dal primo angolo al secondo. La soluzione relativa alla circonferenza goniometrica è:

$$\frac{\pi}{4} < z < \frac{3\pi}{4} \tag{14.33}$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione seno possiamo scrivere:

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < z < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \tag{14.34}$$

Risostituiamo a z la sua espressione e risolviamo l'espressione ottenuta in funzione di x.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} &> \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \pi &> \frac{\pi}{2} + 4k\pi \\ x > -\pi + \frac{\pi}{2} + 4k\pi \quad &; \quad x > -\frac{\pi}{2} + 4k\pi \end{aligned} \tag{14.35}$$

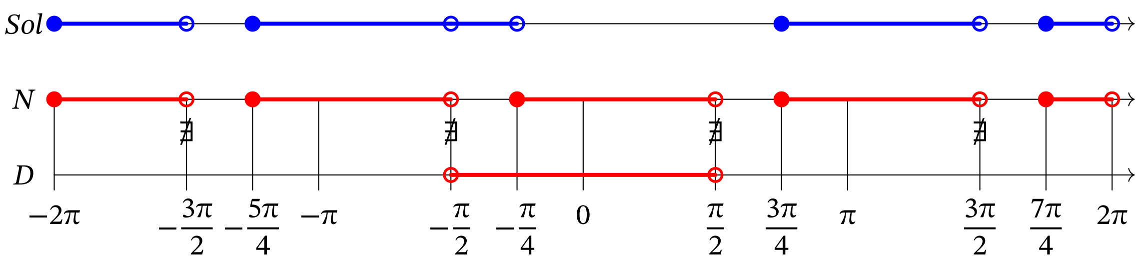
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} &< \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \pi &< \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \\ x < -\pi + \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \quad &; \quad x < \frac{\pi}{2} + 4k\pi \end{aligned} \tag{14.36}$$

La soluzione finale è:

$$-\frac{\pi}{2} + 4k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 4k\pi \tag{14.37}$$

- Il periodo della soluzione associata al numeratore è π mentre quello della soluzione associata al denominatore è 4π. I due periodi sono comparabili. Non possiamo rappresentarli contemporaneamente su una circonferenza goniometrica dato che questa permette di rappresentare angoli inferiori a 2π. Per cui rappresentiamo le due soluzioni in linea, come un normale studio del segno, in uno stesso intervallo grande quanto il minimo comune multiplo tra le due ovvero 4π. A nostro arbitrio studiamo il segno delle due espressioni nell'intervallo compreso tra -2π e 2π.

  Riportiamo tutti i punti significativi dei due studi del segno e il segno negativo della frazione (quello richiesto dalla disequazione) sulla linea blu. Indichiamo esplicitamente anche i punti esclusi dalle condizioni di esistenza.



La soluzione finale (guardando la figura) è l'unione di cinque intervalli.

$$\begin{aligned} -2\pi \leq x < -\frac{3\pi}{2} \quad &\vee \\ -\frac{5\pi}{4} \leq x < -\frac{\pi}{2} \quad &\vee \\ -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} \quad &\vee \\ \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2} \quad &\vee \\ \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{aligned} \tag{14.38}$$

Considerando che il periodo complessivo è 4π possiamo infine scrivere:

$$\begin{aligned} 4k\pi - 2\pi \leq x < -\frac{3\pi}{2} + 4k\pi \quad &\vee \\ 4k\pi - \frac{5\pi}{4} \leq x < -\frac{\pi}{2} + 4k\pi \quad &\vee \\ 4k\pi - \frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} + 4k\pi \quad &\vee \\ 4k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \quad &\vee \\ 4k\pi + \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi + 4k\pi \end{aligned} \tag{14.39}$$