Equazioni e disequazioni esponenziali

esercizi svolti e ordinati per competenze

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alle equazioni e disequazioni logaritmiche, quali si studiano attualmente al liceo scientifico; sono pensati come sintesi per un ripasso, soprattutto per gli alunni più in difficoltà. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso. Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Benedetta Olla, Federico Belvisi.

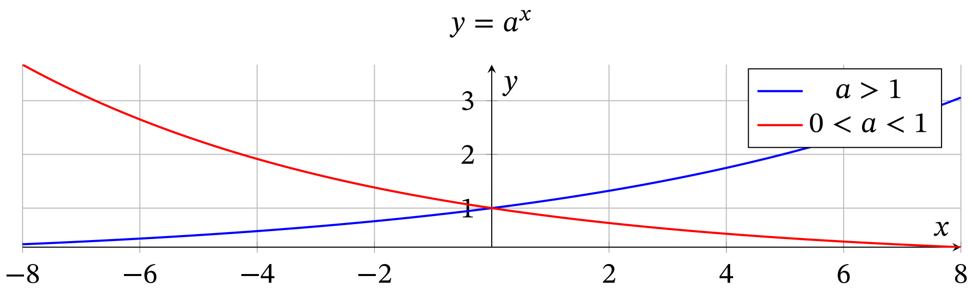
2 Funzioni esponenziali

Proprietà delle potenze	
$a \in \mathbb{R} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$	
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$

Una funzione esponenziale ha la forma di una potenza con base a e esponente x.

$$y = a^x \quad ; \quad a > 0 \wedge a \neq 1 \quad ; \quad x \in \Re \tag{2.1}$$

Il *dominio* è dato da tutti i numeri reali.
Il *codominio* è dato da tutti i reali positivi: la funzione esponenziale non si annulla mai.
Tutti gli esponenziali passano per il punto di coordiante $P(0; 1)$.



Se la base è compresa tra zero e uno la funzione è decrescente.
Se la base è maggiore di uno la funzione è crescente.

3 Equazioni esponenziali

3.1 Equazioni elementari

Le equazioni esponenziali elementari si risolvono riducendo l'equazione a due esponenziali con la stessa base posti ai due membri dell'equazione. Dopodiché si possono eguagliare gli esponenti dei due esponenziali ottenendo un'equazione algebrica.

Come ausilio alla soluzione ricordiamoci che $a^1 = a$ e $a^0 = 1$.

Esempio: $3^{x+1} - 27 = 0$

- Si cerca in generale di aver un unico addendo a primo e secondo membro.

$$3^{x+1} = 27 \tag{3.1}$$

- Poi si esprime quello che c'è in forma di potenza.

$$3^{x+1} = 3^3 \tag{3.2}$$

- E per magia compare una stessa base a primo e secondo membro: il 3.
- A questo punto possiamo eguagliare gli esponenti e risolviamo l'equazione algebrica risultante.

$$x + 1 = 3 \quad ; \quad x = 2 \tag{3.3}$$

N.B. Gli esponenziali elementari non hanno bisogno di condizioni di esistenza.

Esercizio 1 *Risolvi l'equazione* $5^x = 125$

Riscriviamo il secondo membro scomponendolo in fattori e cercando di evidenziare una potenza di cinque.

$$\begin{aligned} 5^x &= 5^3 \\ x &= 3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esercizio 2 *Risolvi l'equazione* $3^x = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

Riscriviamo il secondo membro scomponendolo in fattori e cercando di evidenziare una potenza di tre perché quella è la base dell'esponenziale.

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} \\ 3^x &= \frac{3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ 3^x &= 3^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Poi passiamo all'argomento dell'esponenziale.

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ x &= \frac{8+2-1}{4} \\ x &= \frac{9}{4} \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2 Equazioni risolubili con un'incognita ausiliaria

La seconda grande categoria di equazioni esponenziali è quella in cui possiamo individuare uno stesso identico esponenziale in una o più elementi dell'equazione. Sostituendo quell'esponenziale con un'incognita ausiliaria si può tentare di trasformare l'equazione esponenziale in un'equazione algebrica. Risolta l'equazione algebrica si attribuiscono i risultati ottenuti all'esponenziale di partenza, ottenendo una o più equazioni esponenziali elementari.

Esempio: $4^x = 2^x + 2$

- Non si può avere un unico addendo a primo e secondo membro: l'equazione non può essere ricondotta a quelle elementari.
- Si cerca di far comparire uno stesso esponenziale. Trasformiamo 4^x:

$$\begin{aligned}(2^2)^x &= 2^x + 2\\ 2^{2x} &= 2^x + 2\\ (2^x)^2 &= 2^x + 2\end{aligned} \tag{3.7}$$

- Vediamo che compare solo 2^x. Cambiamo variabile ($2^x = t$), trasformando l'equazione esponenziale in una algebrica.

$$t^2 = t + 2 \tag{3.8}$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \tag{3.9}$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \tag{3.10}$$

$$t = 2 \quad ; \quad t = -1 \tag{3.11}$$

- Eguagliamo l'esponenziale di partenza ai due valori ottenuti per t, ottenendo due equazioni esponenziali elementari.

$$\begin{aligned}&2^x = 2 \quad ; \quad 2^x = 2^1 \quad ; \quad x = 1\\ &2^x = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile perché un esponeziale è sempre positivo}\end{aligned} \tag{3.12}$$

Esercizio 3 *Risolvi l'equazione* $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$

Scomponiamo gli esponenti degli esponenziali.

$$5^x \cdot 5^2 - 4 \cdot 5^1 \cdot 5^{-x} - 30 = -5^2 \cdot 5^{-x} \tag{3.13}$$

Dividiamo entrambi i membri per il fattore comune (5).

$$\begin{aligned}5^x \cdot 5 - 4 \cdot 5^{-x} - 6 &= -5 \cdot 5^{-x}\\ 5^x \cdot 5 - \frac{4}{5^x} - 6 &= -\frac{5}{5^x}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Usiamo la posizione $5^x = t$ e trasformiamo l'equazione esponenziale in una algebrica.

$$t \cdot 5 - \frac{4}{t} - 6 = -\frac{5}{t} \tag{3.15}$$
$$\frac{5t^2 - 4 - 6t}{t} = -\frac{5}{t} \tag{3.16}$$
$$\frac{5t^2 - 6t + 1}{t} = 0 \tag{3.17}$$

L'ultima equazione vale zero solo se il numeratore vale zero. Il denominatore è sicuramente diverso da zero (C.E.) perché è un'esponenziale.

$$5t^2 - 6t + 1 = 0 \tag{3.18}$$
$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} \tag{3.19}$$
$$t = 1 \quad ; \quad t = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \tag{3.20}$$

Eguagliamo l'esponenziale di partenza ai due valori ottenuti per t, ottenendo due equazioni esponenziali elementari.

$$\begin{aligned} &5^x = 1 \quad ; \quad 5^x = 5^0 \quad ; \quad x = 0 \\ &5^x = \frac{1}{5} \quad ; \quad 5^x = 5^{-1} \quad ; \quad x = -1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3 Equazioni elementari risolubili con i logaritmi

Le equazioni esponenziali elementari si risolvono riducendo l'equazione a due esponenziali con la stessa base posti ai due membri dell'equazione. Questo non è sempre possibile, ma con l'aiuto dei logaritmi si possono avere anche due basi diverse a primo e secondo membro.

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Facendo il logaritmo del primo e secondo membro dell'equazione riusciamo a mettere in evidenza l'esponente di uno dei dei esponenziali e quindi l'incognita.

Esempio: $3^{x+1} - 10 = 0$

- Si cerca in generale di aver un unico addendo a primo e secondo membro.

$$3^{x+1} = 10 \tag{3.22}$$

- Questo è stato possibile, ma non abbiamo la stessa base. Tuttavia possiamo fare il logaritmo di primo e secondo membro, logaritmo nella base dell'espressione con l'incognita.

$$\begin{aligned} \log_3(3^{x+1}) &= \log_3(10) \\ (x+1)\cdot\log_3 3 &= \log_3 10 \\ x+1 &= \log_3 10 \\ x &= 1 + \log_3 10 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Esercizio 4 *Risolvi la seguente equazione:* $5^{2x-3} - 7^{1-4x}$

Lasciamo un esponenziale a primo membro e portiamo l'altro a secondo membro.

$$5^{2x-3} = 7^{1-4x} \tag{3.24}$$

Non abbiamo la stessa base. Possiamo usare i logaritmi. L'incognita è presente con entrambe le basi: scegliamo come base per il logaritmo quella che preferiamo. Qui scelgo la base 5.

$$\begin{aligned} \log_5(5^{2x-3}) &= \log_5(7^{1-4x}) \\ (2x-3)\log_5 5 &= (1-4x)\log_5 7 \\ 2x-3 &= \log_5 7 - 4x\log_5 7 \\ 2x + 4x\log_5 7 &= 3 + \log_5 7 \\ x(2+4\log_5 7) &= 3+\log_5 7 \\ x &= \frac{3+\log_5 7}{2+4\log_5 7} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Se l'espressione ottenuta non è ritenuta abbastanza elegante si può tentare di scriverla diversamente applicando un cambiamento di base ai logaritmi e facendoli diventare logaritmi naturali.

$$\frac{3+\log_5 7}{2+4\log_5 7} = \frac{3+\dfrac{\ln 7}{\ln 5}}{2+4\dfrac{\ln 7}{\ln 5}} = \frac{\dfrac{3\ln 5+\ln 7}{\ln 5}}{\dfrac{2\ln 5+4\ln 7}{\ln 5}} = \frac{3\ln 5+\ln 7}{2\ln 5+4\ln 7} \tag{3.26}$$

4 Disequazioni esponenziali

4.1 Disequazioni elementari

Le disequazioni esponenziali elementari si risolvono riducendo l'equazione a due esponenziali con la stessa base posti ai due membri della disequazione. Dopodiché si possono mettere in relazione gli esponenti dei due esponenziali, ottenendo una disequazione algebrica.

La differenza con le equazioni sta nel fatto che:

1. Se **la base è maggiore di 1** il verso della disequazione si estende agli esponenti.
2. Se **la base è minore di 1** la relazione tra gli esponenti ha il verso opposto alla disequazione.

Risolviamo la seguente disequazione in due modi diversi. In quella a sinistra trasformiamo i due membri nella base 2; in quella a destra nella base 1/4.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64 \tag{4.1}$$

base maggiore di uno

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2^2}\right)^{x-1} &< 2^6\\
(2^{-2})^{x-1} &< 2^6\\
2^{-2x+2} &< 2^6\\
-2x+2 &< 6\\
-2x &< 4\\
x &> \frac{4}{-2}\\
x &> -2
\end{aligned}$$

base minore di uno

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} &< 4^3\\
\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} &< \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\\
x-1 &> -3\\
x &> -2
\end{aligned}$$

Si scelga tra i due il metodo che si preferisce: meglio qualche passaggio in più, ma capendo quello che si fa.

Esercizio 5 *Risolvi la disequazione* $17\sqrt{2^{x+1}} > 34\sqrt[3]{4^{x-3}}$

Semplifichiamo il fattore comune a primo e secondo membro e trasformiamo le radici.

$$\begin{aligned}
\frac{17}{17}\sqrt{2^{x+1}} &> \frac{34}{17}\sqrt[3]{4^{x-3}}\\
1(2^{x+1})^{\frac{1}{2}} &> 2(4^{x-3})^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Trasformiamo gli esponenti per potergli aggregare.

$$2^{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)} > 2 \cdot 4^{\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{3}\right)}$$
$$2^{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)} > 2 \cdot (2^2)^{\left(\frac{x}{3}-1\right)}$$
$$2^{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)} > 2^1 \cdot 2^{\left(\frac{2x}{3}-2\right)}$$
$$2^{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)} > 2^{\left(1+\frac{2x}{3}-2\right)}$$

Passiamo agli esponenti.

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2} > 1+\frac{2x}{3}-2$$
$$\frac{3x+3}{6} > \frac{6+4x-12}{6}$$
$$3x-4x > 6-12-3$$
$$-x > -9$$
$$x < 9$$

4.2 Disequazioni elementari con incognita ausiliaria

Le disequazioni con *incognita ausiliaria*, così come le analoghe equazioni, si caratterizzano per avere uno stesso esponenziale (stessa base e stesso esponente) che compare in tutta la disequazione. Sostituendo questo esponenziale con una nuova incognita (una lettera a piacimento, ma di solito la lettera t) la disequazione diventa una disequazione algebrica in questa nuova incognita. Le soluzioni che otteniamo diventano altrettante disequazioni esponenziali elementari.

Esempio: $5^{2x} - 5^x > 20$.

- Nella precedente disequazione non possiamo aggregare gli esponenziali a primo membro, pur avendo la stessa base, né possiamo facilmente scrivere il numero a secondo membro con la stessa base. Cerchiamo, se possibile, di fare comparire uno stesso esponenziale ripetuto più volte in tutta la disequazione.

$$(5^x)^2 - 5^x - 20 > 0 \tag{4.2}$$

- Ora vediamo che compare solo l'esponenziale 5^x: facciamo un cambiamento di variabile chiamandolo t.

$$t^2 - t - 20 > 0 \tag{4.3}$$

- Abbiamo una disequazione algebrica di secondo grado: risolviamola.

$$\begin{gathered} t^2 - t - 20 = 0 \\ t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-20)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \\ t_1 = 5 \quad ; \quad t_2 = -4 \end{gathered} \tag{4.4}$$

  Abbiamo una parabola con concavità verso l'alto. La positività è negli intervalli esterni.

$$t < -4 \vee t > 5 \tag{4.5}$$

- Risostituiamo l'esponenziale alla variabile t, ottenendo due disequazioni esponenziali elementari.

$$\begin{aligned} &5^x < -4 \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile} \\ &5^x > 5 \quad ; \quad x > 1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

  La soluzione finale è l'unione delle due soluzioni ottenute quindi:

$$x > 1 \tag{4.7}$$

Esercizio 6 *Risolvi la seguente disequazione:* $2 \cdot 3^{-x} - 3^x \geq 1$

Nella precedente disequazione non possiamo aggregare gli esponenziali a primo membro, pur avendo la stessa base. Cerchiamo, se possibile, di fare comparire uno stesso esponenziale ripetuto più volte in tutta la disequazione.

$$2 \cdot \frac{1}{3^x} - 3^x \geq 1 \tag{4.8}$$

Attraverso l'incognita ausiliaria $t = 3^x$ trasformiamo la disequazione data in una algebrica.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{t} - t &\geq 1 \qquad \text{C.E.} \quad t \neq 0 \\ 2 \cdot \frac{1}{t} - t - 1 &\geq 0 \\ \frac{2 - t^2 - 1}{t} &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Abbiamo una disequazione razionale fratta: studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

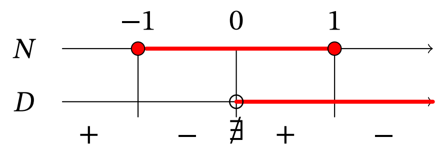
$$\begin{aligned} \text{N} \quad & -t^2 + 1 \geq 0 \\ & -t^2 + 1 = 0 \quad t^2 = 1 \quad t = \pm 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Parabola verso il basso: positività nell'intervallo interno

$$-1 \leq t \leq 1 \tag{4.11}$$

$$\text{D} \quad t > 0 \tag{4.12}$$

Non scriviamo anche uguale a zero per le condizioni di esistenza.



Gli intervalli di positività e quindi le soluzioni dell'equazione in t sono:

$$t \leq -1 \vee 0 < t \leq 1 \tag{4.13}$$

Risostituiamo l'esponenziale.

$$3^x \leq -1 \vee 0 < 3^x \leq 1 \tag{4.14}$$

La prima disequazione è impossibile.

$$3^x < -1 \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile} \tag{4.15}$$

$$3^x > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \Re \tag{4.16}$$

$$3^x \leq 1 \quad ; \quad 3^x \leq 3^0 \quad ; \quad x < 0 \tag{4.17}$$

La prima soluzione va unita all'intersezione della seconda e della terza: quindi la soluzione finale è:

$$x < 0 \tag{4.18}$$