Equazioni e disequazioni algebriche

esercizi svolti e ordinati per competenze

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alle equazioni e disequazioni logaritmiche, quali si studiano attualmente al liceo scientifico; sono pensati come sintesi per un ripasso, soprattutto per gli alunni più in difficoltà. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso.
Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Parte I

Equazioni e disequazioni razionali

2 Equazioni

Una *equazione* è una eguaglianza verificata solo per particolari valori attribuibili alle lettere dette incognite.

Classificazione

Le equazioni si possono dividere in *algebriche* e *trascendenti*:

- sono *algebriche* quando sulle incognite vengono eseguite le quattro operazioni fondamentali, l'elevamento a potenza intera e l'estrazione di radice;
- sono *trascendenti* se non sono algebriche.

Le equazioni si possono dividere in *intere* e *fratte*:

- sono *intere* se le incognite non compaiono a denominatore di nessuna frazione;
- sono *fratte* se le incognite compaiono a denominatore di qualche frazione.

Le equazioni si possono dividere in *razionali* e *irrazionali*:

- sono *razionali* quando le incognite non compaiono sotto radice;
- sono *irrazionali* quando le incognite compaiono sotto radice.

Principi di equivalenza per le equazioni

Primo principio addizionando o sottraendo una stessa quantità a primo e secondo membro della equazione, l'equazione non cambia.
Conseguenza: un addendo può essere spostato da un membro all'altro cambiandolo di segno.

Secondo principio: moltiplicando o dividendo per uno stesso termine diverso da zero i due membri di una equazione, l'equazione non cambia.

Nota: con maggiore correttezza invece dire che l'equazione non cambia possiamo dire che l'equazione si trasforma in una equivalente, cioè con le stesse soluzioni.

2.1 I grado (algebriche, razionali, intere)

Le equazioni di primo grado si risolvono portando a primo membro tutti gli addendi con l'incognita e a secondo membro tutti gli altri termini. Infine si mette in evidenza l'incognita.

Esercizio 1 *Risolvi la seguente equazione:* $-7x - 2 = 3x - 1$

Porto tutte le incognite a primo membro, applicando il primo principio di equivalenza per l'equazioni:

$$\begin{gathered} -7x - 3x = 2 - 1 \\ -10x = 1 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Elimino il fattore che moltiplica la x applicando il secondo principio di equivalenza:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &= \frac{1}{-10} \\ x &= -\frac{1}{10} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2 II grado (algebriche, razionali, intere)

Le equazioni di secondo grado hanno la seguente forma generale:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.3}$$

Queste equazioni possono avere *due soluzioni* reali distinte, *una soluzione* reale (due soluzioni reali coincidenti), o *nessuna soluzione* (reale). Le soluzioni sono dette anche zeri dell'equazione (perché annullano il trinomio) o radici (perché nella formula risolutiva successiva compaiono delle radici quadrate).

Nell'equazione di secondo grado evidenziamo il termine chiamato delta : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Se $\Delta > 0$ abbiamo due soluzioni
- Se $\Delta = 0$ abbiamo una soluzione
- Se $\Delta < 0$ non abbiamo soluzioni

Formula risolutiva generale:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.4}$$

dove sotto radice compare il Δ appena illustrato.

Se anche la formula risolutiva funziona sempre è opportuno e più semplice evidenziare dei casi particolari, dette *forme spurie*, con cui può comparire l'equazione.

- *Equazione monomia*

  Ha la forma $ax^2 = 0$, con $b = 0$ e $c = 0$. Ha come unica soluzione $x = 0$

- *Equazione pura*

  Ha la forma $ax^2 + c = 0$, con $b = 0$. Si risolve mettendo in evidenza la x.

  La soluzione generale è:

  $$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \tag{2.5}$$

- *Equazione spuria*

  Ha la forma $ax^2 + bx = 0$, con $c = 0$. Si risolve scomponendola in fattori, raccogliendo a fattore comune una x e applicando la legge dell'annullamento del prodotto all'equazione ottenuta.

$$\begin{gathered} ax^2 + bx = 0 \\ x(ax + b) = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$x = 0 \quad ; \quad ax + b = 0 \tag{2.7}$$

Esercizio 2 *Risolvi la seguente equazione:* $2x^2 + 6x - 36 = 0$

Calcoliamo il delta

$$\Delta = 6 \cdot 6 - 4 \cdot 2(-36) = 36 + 4 \cdot 2 \cdot 36 = 324 > 0 \tag{2.8}$$

Ci aspettiamo due soluzioni distinte. Applichiamo ora la formula risolutiva generale.

$$\begin{gathered} x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{4} = \frac{-6 \pm 18}{4} \\ x_1 = \frac{-6+18}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-6-18}{4} = -\frac{24}{4} = -6 \end{gathered} \tag{2.9}$$

Esercizio 3 *Risolvi la seguente equazione:* $47x^2 = 0$

Abbiamo una equazione di secondo grado nella forma pura. La soluzione è immediatamente $x = 0$.

Esercizio 4 *Risolvi la seguente equazione:* $6x^2 - 3x = 0$

Abbiamo una equazione di secondo grado nella forma spuria: scomponiamola in fattori ed eguagliamoli a zero.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 3x &= 0 \\ 3x(2x-1) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 Monomie

Hanno la forma di un coefficiente per una potenza della x.

$$ax^n = 0 \tag{2.11}$$

La soluzione, a prescindere dalla potenza della x, è sempre e solo $x = 0$.

Esercizio 5 *Risolvi la seguente equazione:* $13x^4 = 0$

Abbiamo una equazione di quarto grado monomia. Immediatamente scriviamo $x = 0$.

2.4 Binomie

Hanno la forma di un coefficiente per una potenza della x più un termine di grado zero.

$$ax^n + c = 0 \tag{2.12}$$

- Se il grado della potenza è *dispari* mettiamo in evidenza la x e facciamo l'opportuna radice: la radice ha indice dispari e possiamo sempre farla per qualsiasi numero reale, ottenendo sempre *una soluzione*.

$$x = \sqrt[n]{-\frac{c}{a}} \tag{2.13}$$

- Se il grado della potenza è *pari* mettiamo in evidenza la x e facciamo l'opportuna radice. Analogamente all'equazione di secondo grado pura possiamo ottenere *due soluzioni oppure nessuna* se l'argomento della radice è negativo.

$$x = \pm\sqrt[n]{-\frac{c}{a}} \tag{2.14}$$

Esercizio 6 *Risolvi la seguente equazione:* $13x^5 + 4 = 0$

Abbiamo un'equazione binomia di grado dispari: ci aspettiamo una sola soluzione.

$$\begin{aligned} 13x^5 + 4 &= 0 \\ x^5 &= -\frac{4}{13} \\ x &= \sqrt[5]{-\frac{4}{3}} = -\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uscire il segno negativo dalla radice (cosa possibile se l'indice è dispari) per una soluzione più elegante.

2.5 Biquadratiche

Hanno la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0.$

Somigliano molto ad una equazione di secondo grado e ad essa si riconducono.

Si comincia con un cambiamento di variabile $z = x^n$, con il quale l'equazione diventa un'equazione di secondo grado in zeta: $az^2 + bz + c = 0$. La soluzione di questa equazione, ritornando alla variabile iniziale, diventa a sua volta come due equazioni in x le cui soluzioni ci danno la soluzione dell'equazione iniziale.

Esercizio 7 *Risolvi la seguente equazione:* $5x^6 - 7x^3 - 3 = 0$

Abbiamo un'equazione algebrica di sesto grado in cui compare il termine di sesto grado, uno di terzo grado (la metà del sesto) e uno di grado zero: abbiamo quindi un'equazione biquadratica. Facciamo un cambiamento di variabile per ricondurci ad una equazione di secondo grado.

$$z = x^3 \tag{2.16}$$
$$5z^2 - 7z - 6 = 0 \tag{2.17}$$
$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(5)(-6)}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10}$$
$$z_1 = \frac{7+13}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad ; \quad z_1 = \frac{7-13}{10} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

Adesso ritorniamo alla variabile iniziale e otteniamo due equazioni di terzo grado binomie in x.

$$x^3 = 2 \tag{2.18}$$
$$x = \sqrt[3]{2}$$

$$x^3 = -\frac{3}{5} \tag{2.19}$$
$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{5}}$$

Le soluzioni sono quindi:

$$x = \sqrt[3]{2} \ \vee \ x = -\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \tag{2.20}$$

2.6 Scomposte in fattori

Legge dell'annullamento del prodotto

Se il prodotto di due fattori (due numeri reali) è zero almeno uno dei due fattori vale zero.

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \tag{2.21}$$

Le equazioni che compaiono nella forma di un prodotto di fattori eguagliato a zero si risolvono con la legge dell'annullamento del prodotto, eguagliando a zero ogni fattore.

Esercizio 8 *Risolvi la seguente equazione:* $4(x-3)(2-3x) = 0$

Abbiamo una equazione scomposta in fattori: eguagliamo a zero ogni fattore per la legge dell'annullamento del prodotto. Il fattore numerico che moltiplica tutta l'espressione lo tralasciamo perché non contiene l'incognita.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} 2 - 3x &= 0 \\ -3x &= -2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Le soluzione dell'equazione sono $x = 3$ e $x = \frac{2}{3}$.

2.7 Scomponibili in fattori (e di grado superiore al secondo)

Per poter procedere alla soluzione di una equazione di grado superiore al secondo la dobbiamo, in generale, *scomporre in fattori* di primo o secondo grado, *abbassando il grado* in modo che si possa risolverla con i metodi prima illustrati.

Un modo per abbassare il grado è dividere il polinomio per un binomio di primo grado del tipo $x - x_0$ con una divisione col metodo di Ruffini.

Se un polinomio ha come zero un numero x_0, ovvero:

$$P(x_0) = 0 \tag{2.24}$$

Allora il polinomio è divisibile per il fattore $x - x_0$

Per trovare il numero x_0, zero del polinomio e dell'equazione, possiamo procedere col seguente teorema.

Teorema delle radici razionali

Abbiamo un'equazione algebrica intera a coefficienti interi.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } a_0, a_n \neq 0 \tag{2.25}$$

Allora ogni soluzione razionale dell'equazione è della forma p/q dove:
p è un divisore del termine noto a_0
q è un divisore del coefficiente a_n

Il teorema precedente ci consente di trovare le eventuali soluzioni razionali dell'equazione data, ma solo quelle.

Esercizio 9 *Risolvi la seguente equazione:* $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$

L'equazione data è di terzo grado: per risolverla dobbiamo trovare almeno una radice e abbassare il grado dell'equazione. Per trovare una radice possiamo usare il teorema delle radici razionali. Esso ci dice che gli eventuali zeri razionali dell'equazione sono da cercare innanzi tutto tra i divisori del termine noto. In questo caso:

$$\{\pm 1 \,;\, \pm 5\} \tag{2.26}$$

Partendo da i numeri più piccoli troviamo:

$$P(1) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 5 = 0 \tag{2.27}$$

Quindi 1 è una radice dell'equazione e il polinomio è divisibile per $x - 1$.
Facciamo la divisione col metodo di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & -2 & 5 \\ 1 & & 2 & -3 & -5 \\ \hline & 2 & -3 & -5 & 0 \end{array}$$

I valori numerici nell'ultima riga ci dicono che la divisione è esatta e possiamo scrivere l'equazione come:

$$(x-1)(2x^2-3x-5)=0 \tag{2.28}$$

Risolviamo l'equazione associata al secondo fattore.

$$2x^2-3x-5=0 \tag{2.29}$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(2)(-5)}}{4}=\frac{3\pm 7}{4}$$

$$x_1=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \quad ; \quad x_2=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

Infine le soluzione dell'equazione data sono:

$$x_1=1 \quad ; \quad x_2=-1 \quad ; \quad x_3=\frac{5}{2} \tag{2.30}$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Abbiamo un'equazione algebrica a coefficienti complessi.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{C} \text{ e } a_0, a_n \neq 0 \tag{2.31}$$

Ogni equazione di questo tipo ammette almeno una radice complessa (o zero).

Se ammette almeno un radice allora ne ammette esattamente n (come il grado dell'equazione). Le radici possono essere reali o complesse coniugate, quindi ci sono sempre n radici complesse, ma ci possono essere fino a n radici reali.

3 Disequazioni

Una *disequazione* è una diseguaglianza verificata solo per particolari valori attribuibili alle lettere dette incognite.

Classificazione

Le disequazioni si possono dividere in *algebriche* e *trascendenti*:

- sono *algebriche* quando sulle incognite vengono eseguite le quattro operazioni fondamentali, l'elevamento a potenza intera e l'estrazione di radice;
- sono *trascendenti* se non sono algebriche.

Le disequazioni si possono dividere in *intere* e *fratte*:

- sono *intere* se le incognite non compaiono a denominatore di nessuna frazione;
- sono *fratte* se le incognite compaiono a denominatore di qualche frazione.

Le disequazioni si possono dividere in *razionali* e *irrazionali*:

- sono *razionali* quando le incognite non compaiono sotto radice;
- sono *irrazionali* quando le incognite compaiono sotto radice.

Principi di equivalenza per le disequazioni

Primo principio: addizionando o sottraendo una stessa quantità a primo e secondo membro della disequazione, la disequazione non cambia.
Conseguenza: un addendo può essere spostato da un membro all'altro cambiandolo di segno.

Secondo principio: moltiplicando o dividendo per uno stesso termine diverso da zero i due membri di una disequazione, la disequazione non cambia se il termine è positivo, cambia di verso se il termine è negativo.

Nota: con maggiore correttezza invece dire che la disequazione non cambia possiamo dire che la disequazione si trasforma in una equivalente, cioè con le stesse soluzioni.

3.1 I grado (algebriche, razionali, intere)

Le disequazioni di primo grado si risolvono portando a primo membro tutti gli addendi con l'incognita e a secondo membro tutti gli altri termini. Infine si mette in evidenza l'incognita.

Esercizio 10 *Risolvi la seguente disequazione:* $-7x - 2 > 3x - 1$

Porto tutte le incognite a primo membro, applicando il primo principio di equivalenza per le disequazioni:

$$\begin{aligned} -7x - 3x &> 2 - 1 \\ -10x &> 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Elimino il fattore che moltiplica la x applicando il secondo principio di equivalenza:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &< \frac{1}{-10} \\ x &< -\frac{1}{10} \end{aligned} \tag{3.2}$$

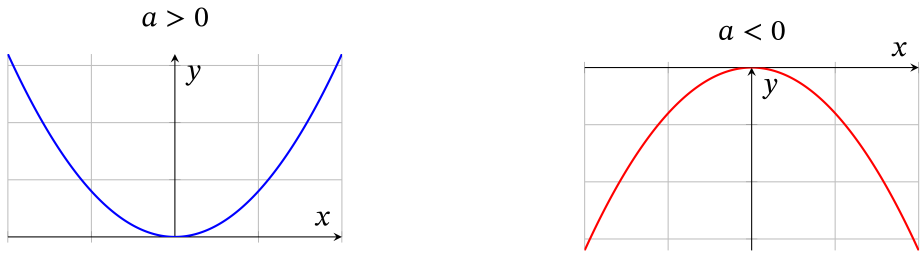
Rappresentazione grafica della soluzione:

3.2 Monomie

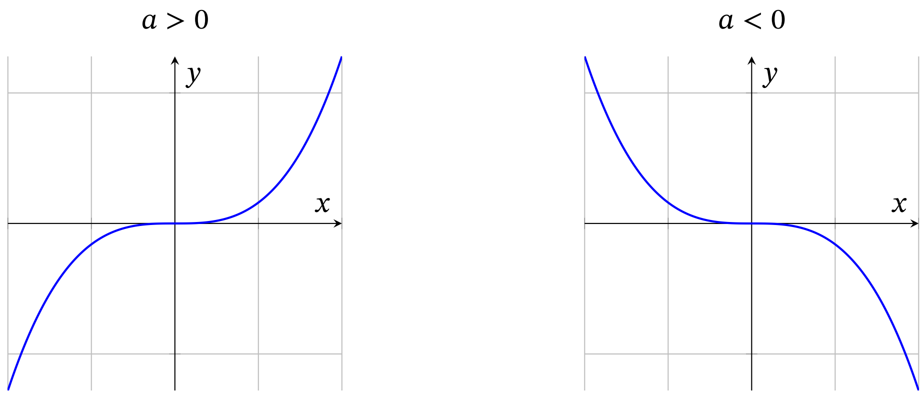
Le disequazioni monomie hanno la forma:

$$ax^n \lesseqgtr 0 \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

1. Se l'indice n è *pari* la funzione $y = ax^n$ ha un grafico simile ad una parabola che passa **sempre** per l'origine degli assi. La concavità segue il segno di a.
   La soluzione segue di conseguenza.



2. Se l'indice n è *dispari* la funzione $y = ax^n$ ha un grafico dei seguenti due tipi. La concavità segue il segno di a.
   La soluzione segue di conseguenza.



Esercizio 11 *Risolvi la seguente disequazione:* $3x^4 > 0$

Abbiamo una disequazione monomia, in cui $a = 3$ e la potenza della variabile è pari. Il grafico associato al monomio è il primo precedentemente mostrato. Per cui la funzione è sempre positiva o uguale a zero per $x = 0$. Di conseguenza la soluzione della disequazione è:

$$x \neq 0 \quad \text{oppure} \quad x \in \Re - \{0\} \tag{3.4}$$

Esercizio 12 *Risolvi la seguente equazione:* $-8x^5 \leq 0$

Abbiamo una disequazione monomia, in cui $a = -8$ e la potenza della variabile è dispari. Il grafico associato al monomio è il secondo precedentemente mostrato. Per cui la funzione è positiva o uguale a zero per $x \leq 0$. Di conseguenza la soluzione della disequazione è:

$$x \leq 0 \tag{3.5}$$

3.3 Binomie

Le disequazioni Binomie hanno la forma:

$$ax^n + b \lesseqqgtr 0 \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

1. Se l'indice n è *pari* la funzione $y = ax^n + b$ ha un grafico simile ad una parabola che interseca gli assi o *in due punti o nessuno*. La concavità segue il segno di a.
   Per trovare la soluzione studiamo le soluzioni dell'equazione associata.

$$ax^n + b = 0 \tag{3.7}$$

$$x^n = -\frac{b}{a} \tag{3.8}$$

$$x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \tag{3.9}$$

   Se le radici sono reali la curva associata al binomio interseca l'asse x in due punti. Disegniamola con la giusta concavità e dal disegno possiamo dire quale sia la soluzione della disequazione di partenza

2. Se l'indice n è *dispari* possiamo direttamente mettere in evidenza la x nella disequazione e applicare la radice ad entrambe i membri.
   Abbiamo quindi *sempre* una soluzione della disequazione.

$$ax^n + b \lesseqqgtr 0 \tag{3.10}$$

$$x^n \lesseqqgtr -\frac{b}{a} \tag{3.11}$$

$$x \lesseqqgtr \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \tag{3.12}$$

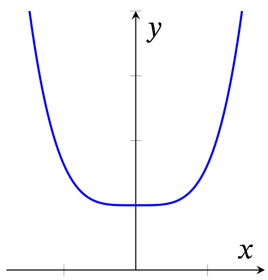
Esercizio 13 *Risolvi la seguente disequazione:* $10x^4 + 1 > 0$

Abbiamo una disequazione binomia con una potenza di indice pari.
Cerchiamo le eventuali soluzioni dell'equazione associata.

$$10x^4 + 1 = 0 \tag{3.13}$$

$$x^4 = -\frac{1}{4} \tag{3.14}$$

L'equazione associata non ha soluzioni (non possiamo avere un numero reale elevato a potenza pari che ci da un numero negativo) . Il grafico associato alla funzione binomia è simile ad una parabola con concavità verso l'alto che non interseca l'asse x: lo disegniamo.



I valori per cui il binomio (cioè la funzione) è positiva e quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$\forall x \in \Re \tag{3.15}$$

Esercizio 14 *Risolvi la seguente disequazione:* $-x^4 + 16 \geq 0$

Abbiamo una disequazione binomia con una potenza di indice pari.
Cerchiamo le eventuali soluzioni dell'equazione associata.

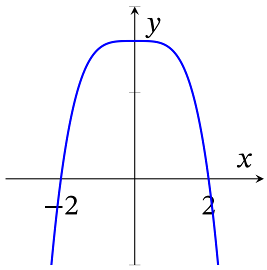
$$-x^4 + 16 = 0 \tag{3.16}$$

$$x^4 = 16 \tag{3.17}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16} \tag{3.18}$$

$$x = \pm 2 \tag{3.19}$$

L'equazione associata ha due soluzioni. Il grafico associato alla funzione binomia è simile ad una parabola con concavità verso il basso che interseca l'asse x in corrispondenza dei due valori dati: lo disegniamo.



I valori per cui il binomio (cioè la funzione) è positiva e quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$-2 \leq x \leq 2 \tag{3.20}$$

Esercizio 15 *Risolvi la seguente disequazione:* $3x^5 + 2 > 0$

Abbiamo una disequazione binomia con una potenza di indice dispari. Possiamo scrivere quasi immediatamente la soluzione potendo estrarre la radice senza problemi di segno.

$$3x^5 + 2 > 0 \tag{3.21}$$

$$x^5 > -\frac{2}{5} \tag{3.22}$$

$$x > -\sqrt[5]{\frac{2}{5}} \tag{3.23}$$

3.4 Disequazioni biquadratiche

Hanno la forma $ax^{2n} + bx^n + c \lesseqgtr 0$.
Somigliano molto ad una disequazione di secondo grado e ad essa si riconducono.

Si comincia con un cambiamento di variabile $z = x^n$, con il quale la disequazione diventa una disequazione di secondo grado $az^2 + bz + c \lesseqgtr 0$. La soluzione di questa disequazione diventa in generale due disequazioni in x che opportunamente unite o intersecate ci danno la soluzione della disequazione iniziale.

Esercizio 16 *Risolvi la seguente disequazione:* $x^6 - 3x^3 + 2 \geq 0$

La disequazione è biquadratica: facciamo un cambiamento di variabile.

$$z = x^3 \tag{3.24}$$

La disequazione diventa così di secondo grado in z.

$$z^2 - 3z + 2 \geq 0 \tag{3.25}$$

Per risolvere la disequazione di secondo grado troviamo le soluzioni dell'equazione associata.

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \\ z_1 &= \frac{3+1}{2} = 2 \quad ; \quad z_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

La parabola associata ha la concavità verso l'alto: è positiva negli intervalli esterni.
Per cui la soluzione della disequazione in z è:

$$z \leq 1 \vee z \geq 2 \tag{3.28}$$

Risostituiamo la x nelle due espressioni in z ottenute e risolviamo le disequazioni in x che otteniamo.

$$x^3 \leq 1 \tag{3.29}$$

Questa è una disequazione binomia con esponente dispari.
Sapendo che $\sqrt[3]{1} = 1$ di conseguenza la soluzione è:

$$x \leq 1 \tag{3.30}$$

L'altra disequazione è:

$$x^3 \geq 2 \tag{3.31}$$

Analogamente alla precedente la soluzione è:

$$x \geq \sqrt[3]{2} \tag{3.32}$$

La soluzione finale, *unione* delle precedenti, è:

$$x^3 \leq 1 \vee x \geq \sqrt[3]{2} \tag{3.33}$$

Esercizio 17 *Risolvi la seguente disequazione:* $x^{10} - 30x^5 - 64 < 0$

La disequazione è biquadratica: facciamo un cambiamento di variabile.

$$z = x^5 \tag{3.34}$$

La disequazione diventa così di secondo grado in z.

$$z^2 - 30z + 64 < 0 \tag{3.35}$$

Per risolvere la disequazione di secondo grado troviamo le soluzioni dell'equazione associata.

$$z^2 - 30z - 64 = 0 \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4(1)(-64)}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{1156}}{2} \\ z_1 &= \frac{30+34}{2} = 32 \quad ; \quad z_2 = \frac{30-32}{2} = -2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

La parabola associata ha la concavità verso l'alto: è negativa nell'intervallo esterno.
Per cui la soluzione della disequazione in z è:

$$-2 < z < 32 \tag{3.38}$$

Risostituiamo la x nelle due espressioni in z ottenute e risolviamo le disequazioni in x che otteniamo.

$$x^5 > -2 \tag{3.39}$$

Questa è una disequazione binomia con esponente dispari. Sapendo che $\sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}$ di conseguenza la soluzione è:

$$x > -\sqrt[5]{2} \tag{3.40}$$

L'altra disequazione è:

$$x^5 < 32 \tag{3.41}$$

Analogamente alla precedente, sapendo che $\sqrt[5]{32} = 2$, la soluzione è:

$$x < 2 \tag{3.42}$$

La soluzione finale, *intersezione* delle precedenti, è:

$$-\sqrt[5]{2} < x < 2 \tag{3.43}$$

3.5 Disequazioni scomposte o scomponibili in fattori

Queste disequazioni si presentano come un prodotto di fattori maggiore o minore a zero.

Per studiare il segno del prodotto:

1. Vediamo se possiamo scomporre ulteriormente l'espressione.
2. Studiamo il segno di ogni fattore, in particolare la sua positività, a prescindere dal segno della disequazione di partenza. Non è obbligatorio studiare la positività, ma facendo una scelta diversa si va incontro quasi sempre ad errori.
3. Facciamo uno schema per studiare il segno del prodotto dei fattori.
4. Scegliamo gli intervalli che hanno il segno richiesto dalla disequazione.

Un errore frequente è quello di moltiplicare tra loro i fattori: è una pessima idea, si finisce solo con avere una disequazione ingestibile.

Esercizio 18 *Risolvi la seguente disequazione:* $(x-3)^3(x^2+2x) < 0$

La disequazione si presenta con una espressione composta da due fattori e di cui ci si chiede di studiare la negatività, ovvero per quali valori di x l'espressione è negativa.

Possiamo vedere che nel secondo fattore possiamo scomporre ulteriormente mettendo in evidenza una x. La disequazione diventa allora:

$$(x-3)^3x(x+2) < 0 \tag{3.44}$$

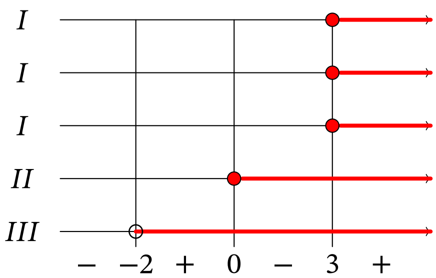
Studiamo la positività dei tre fattori presenti. Osserviamo che il primo fattore ha la forma di una potenza: studiamo il segno della base e poi inseriamo per tre volte quell'espressione nello schema dello studio finale del segno.

$$I \quad x-3>0 \qquad x>3 \tag{3.45}$$

$$II \qquad\qquad x>0 \tag{3.46}$$

$$III \quad x+2>0 \qquad x>-2 \tag{3.47}$$

Nello schema dello studio del segno riportiamo una riga per ogni fattore presente (la potenza è come se fosse uno stesso fattore che compare tre volte). In verticale riportiamo una linea verticale per tutti i numeri che compaiono nelle soluzioni finali.



Abbiamo riportato con una linea rossa (o in grassetto) gli intervalli di positività; niente altrimenti. In basso abbiamo la composizione dei segni. Per cui, dovendo cercare gli intervalli in cui l'espressione è negativa, possiamo scrivere come soluzione:

$$x < -2 \vee 0 < x < 3 \tag{3.48}$$

4 Disequazioni con valori assoluti

4.1 Definizione di valore assoluto

Il valore assoluto di una espressione $f(x)$ è:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

in particolare, se abbiamo solo un numero reale x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Il valore assoluto è una funzione definita per casi. Da essa in generale derivano due possibili espressioni a seconda dell'intervallo in cui siamo. Il valore assoluto di una espressione è per definizione sempre positivo o uguale a zero.

4.2 Equazioni e disequazioni con valore assoluto

In generale un'equazione o disequazione con valore assoluto si trasforma in due sistemi, uno per ogni caso in cui si esplicita il valore assoluto. I due sistemi vanno risolti separatamente e le soluzioni finale unite.

4.3 Casi particolari

$$|A(x)| = k \qquad \begin{cases} \text{se } k < 0 \text{ impossibile} \\ \text{se } k \geq 0 \;\; A(x) = k \vee A(x) = -k \end{cases} \tag{4.3}$$

$$|A(x)| = B(x) \qquad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) = B(x) \end{cases} \tag{4.4}$$

Parte II

Equazioni e disequazioni irrazionali

5 Equazioni

Un'equazione irrazionale con radici quadrate si può risolvere elevando i due membri dell'equazione al quadrato per eliminare le radici e verificando a posteriori che le soluzioni ottenute siano compatibili con le condizioni di esistenza dell'equazione. In particolare:

- se le radici hanno *esponente dispari* si può tranquillamente eseguire l'elevamento a potenza, preservando le soluzioni iniziali;
- se le radici hanno *esponente pari* si può eseguire l'elevamento a potenza preservando le radici iniziali *solo* se i due membri dell'equazione sono già positivi. Altrimenti l'equivalenza tra la nuova e la vecchia equazione non è garantita e possono comparire nuove soluzioni non già presenti.

5.1 Equazione con una radice cubica

$$\sqrt[3]{A(x)} = B(x) \tag{5.1}$$

Per le proprietà delle radici con indici dispari la soluzione è semplicemente:

$$A^3(x) = B(x) \tag{5.2}$$

Esercizio 19 *Risolvi la seguente equazione:* $x + 6 = \sqrt[3]{4x + 216}$

Abbiamo un'equazione irrazionale con una radice con indice dispari: scriviamola in forma normale ed eleviamo i due membri al cubo per eliminare la radice.

$$\begin{gathered}\sqrt[3]{4x + 216} = x + 6 \\ (4x + 216) = (x + 6)^3 \\ 4x + \cancel{216} = x^3 + 18x^2 + 108x + \cancel{216} \\ x^3 + 18x^2 + 104x = 0\end{gathered} \tag{5.3}$$

Abbiamo un'equazione algebrica di terzo grado: risolviamo raccogliendo il fattore comune ed eguagliando a zero ogni fattore ottenuto.

$$x^3 + 18x^2 + 104x = 0 \tag{5.4}$$

$$x(x^2 + 18x + 104) = 0$$

$$x = 0 \quad ; \quad x^2 + 18x + 104 = 0 \tag{5.5}$$

$$x^2 + 18x + 104 = 0 \tag{5.6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(104)}}{2}$$

$$\Delta = 18^2 - 4(104) = -92 < 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Infine l'unica soluzione possibile è $x = 0$.

5.2 Equazione con una radice quadrata

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases} \tag{5.9}$$

Il senso della formula risolutiva è che l'espressione $B(x)$ può essere solo positiva o uguale a zero. Invece $A(x)$, se è compatibile con le condizioni di esistenza della radice, è anche uguale a numero positivo $B^2(x)$.

Esercizio 20 *Risolvi la seguente equazione:* $\sqrt{x+2} - 5 - 3x = 0$

Abbiamo un'equazione irrazionale con una radice quadrata: scriviamola in forma normale lasciando la radice quadrata da sola a primo o secondo membro.

$$\sqrt{x+2} = 5 + 3x \tag{5.10}$$

Adesso possiamo utilizzare lo schema risolutivo prima illustrato.

$$\begin{cases} 5 + 3x \geq 0 \\ x + 2 = (5 + 3x)^2 \end{cases} \tag{5.11}$$

Prima disequazione

$$\begin{aligned} 5 + 3x &\geq 0 \\ 3x &\geq -5 \\ x &\geq -\frac{5}{3} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Seconda equazione

$$\begin{aligned} x + 2 &= (5 + 3x)^2 \\ x + 2 &= 25 + 30x + 9x^2 \\ 9x^2 - 29x + 23 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 9 \cdot 23}}{18} = \frac{29 \pm \sqrt{13}}{18} \\ x_1 &= \frac{29 \pm \sqrt{13}}{18} \simeq 1{,}8 \quad ; \quad x_2 = \frac{29 \pm \sqrt{13}}{18} \simeq 1{,}4 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Facendo sistema tra la disequazione e l'equazione osserviamo che tutte e due le soluzioni dell'equazione sono positive e quindi soddisfano entrambe il sistema.
Le soluzioni dell'equazione irrazionale sono quindi:

$$x_1 = \frac{29 + \sqrt{13}}{18} \vee x_2 = \frac{29 - \sqrt{13}}{18} \tag{5.14}$$

5.3 Equazione con due o più radici quadrate

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \tag{5.15}$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \tag{5.16}$$

Oppure, visto che $A(x) = B(x)$, si può risolvere a piacimento uno solo dei sistemi.

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \tag{5.17}$$

In generale cambiamo di membro alle radici e alle espressioni presenti in modo che siano sicuramente positive, imponiamo le condizioni di esistenza delle radici e eleviamo entrambi i membri al quadrato finché non sono sparite tutte le radici.

Esercizio 21 *Risolvi la seguente equazione:* $\sqrt{2x-3} - \sqrt{7-x} - 2 = 0$

L'equazione è irrazionale con due radici quadrate. La seconda radice e il due compaiono con il segno meno davanti: portiamo entrambi gli addendi a secondo membro affinché risultino sicuramente positivi.

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{7-x} + 2 \tag{5.18}$$

Imponiamo la condizione di esistenza delle due radici e facciamo sistema tra le condizione ottenute.

$$2x - 3 \geq 0 \quad ; \quad x \geq \frac{3}{2} \tag{5.19}$$

$$7 - x \geq 0 \quad ; \quad x \leq 7 \tag{5.20}$$

La soluzione comune alle due condizioni è:

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 7 \quad (1{,}5 \leq x \leq 7) \tag{5.21}$$

Adesso facciamo il quadrato di entrambi i membri dell'equazione di partenza.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x-3})^2 &= (\sqrt{7-x} + 2)^2 \\ 2x - 3 &= 7 - x + 4\sqrt{7-x} + 4 \\ 3x - 14 &= 4\sqrt{7-x} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Abbiamo ottenuto un'altra equazione irrazionale con una sola radice quadrata, scritta in forma normale. La sua risoluzione consiste nel risolvere un sistema in cui poniamo la condizione di positività dell'espressione che qui compare a primo membro e un'equazione con il quadrato di entrambe i membri.

$$\begin{cases} 3x - 14 \geq 0 \\ (3x-14)^2 = (4\sqrt{7-x})^2 \end{cases} \tag{5.23}$$

$$3x - 14 \geq 0 \quad ; \quad x \geq \frac{14}{3} \quad (x \geq 4{,}6) \tag{5.24}$$

Facciamo attenzione al fatto che nella soluzione finale dovremo soddisfare la precedente condizione di esistenza più quest'ultima. Ora possiamo fare il quadrato di entrambe i membri dell'ultima equazione irrazionale.

$$\begin{aligned}(3x-14)^2 &= (4\sqrt{7-x})^2\\ 9x^2-84x+196 &= 16(7-x)\\ 9x^2-84x+196 &= 112-16x\\ 9x^2-68x+84 &= 0\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$9x^2-68x+84=0 \tag{5.26}$$
$$x_{1,2}=\frac{68\pm\sqrt{68^2-4\cdot 9\cdot 84}}{18}=\frac{68\pm 40}{18}$$
$$x_1=\frac{68+40}{18}=\frac{108}{18}=6 \quad ; \quad x_2=\frac{68-40}{18}=\frac{28}{18}=\frac{4}{3}$$

Infine delle due soluzioni ottenute solo la prima è compatibile con le varie condizioni di esistenza, quindi la soluzione finale è:

$$x=6 \tag{5.27}$$

6 Disequazioni

6.1 Disequazione con una radice quadrata

Ci sono due tipologie fondamentali di disequazioni con una sola radice quadrata, a seconda che questa sia maggiore o minore di una espressione.

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x) \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq B(x)^2 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Il senso della formula risolutiva è che l'espressione $B(x)$ può essere sia positiva che negativa.

Se $B(x)$ è negativa la radice basta che esista e allora sarà maggiore di qualsiasi numero negativo.

Se $B(x)$ è positiva allora deve valere la relazione della disequazione iniziale, ma al quadrato: in quel caso, imponendo che $A(x)$ sia maggiore di un espressione al quadrato, stiamo anche imponendo che sia positiva e quindi la radice esista.

Esercizio 22 *Risolvi la seguente disequazione:* $7 - 2x - \sqrt{6x^2 - 1} \leq 0$

Abbiamo una disequazione irrazionale con una sola radice quadrata: cominciamo a scriverla in forma normale, ponendo la radice quadrata da sola a primo membro.

$$\sqrt{6x^2 - 1} \geq 7 - 2x \tag{6.3}$$

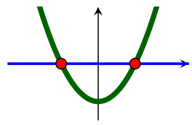
Adesso possiamo osservare che si tratta di una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$: usiamo lo schema risolutivo proposto qui sopra.

$$\begin{cases} 6x^2 - 1 \geq 0 \\ 7 - 2x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 6x^2 - 1 \geq (7 - 2x)^2 \\ 7 - 2x \geq 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Dobbiamo risolvere due sistemi e poi *unire* le soluzioni, ricordando che le due soluzioni che otterremo *non possono avere punti in comune*, a meno che non si abbiano i calcoli precedenti.

Primo sistema
Prima disequazione.

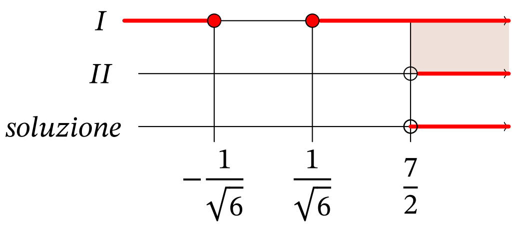
$$\begin{gathered}6x^2-1\geq 0\\ 6x^2-1=0 \quad ; \quad 6x^2=1 \quad ; \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\\ x\leq -\frac{1}{\sqrt{6}} \vee x\geq \frac{1}{\sqrt{6}}\end{gathered} \tag{6.5}$$



Seconda disequazione.

$$\begin{aligned}7-2x&<0\\ -2x&<-7\\ x&>\frac{7}{2}\end{aligned} \tag{6.6}$$

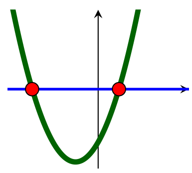
Intersezione tra le due soluzioni.



La soluzione del primo sistema è $x>\frac{7}{2}$.

Secondo sistema
Prima disequazione.

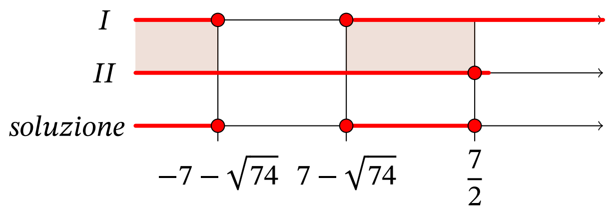
$$\begin{aligned}6x^2-1&\geq (7-2x)^2\\ 6x^2-1&\geq 49-28x+4x^2\\ 2x^2+28x-50&\geq 0\\ x_{1,2}&=\frac{-28\pm\sqrt{28^2-4\cdot 2\cdot(-50)}}{4}\\ &=\frac{-28\pm 4\sqrt{74}}{4}=-7\pm\sqrt{74}\\ x\leq -7-\sqrt{74}&\vee x\geq -7+\sqrt{74}\end{aligned} \tag{6.7}$$



Seconda disequazione.

$$\begin{aligned}7-2x&\geq 0\\ -2x&\geq -7\\ x&\leq\frac{7}{2}\end{aligned} \tag{6.8}$$

Intersezione tra le due soluzioni.

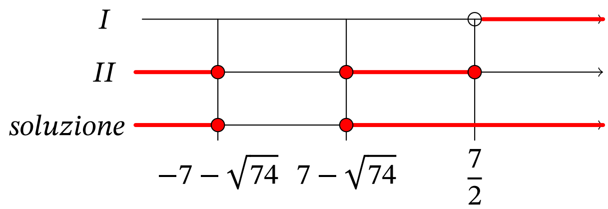


La soluzione del secondo sistema è:

$$x \leq -7-\sqrt{74} \ \vee \ -7+\sqrt{74} \leq x \leq \frac{7}{2} \tag{6.9}$$

Soluzione finale

Adesso dobbiamo unire le soluzioni dei due sistemi. Formalmente potremo scrivere le due soluzioni accostate con il connettivo logico $\vee$, ma sarebbe una soluzione poco chiara ed elegante. Piuttosto rappresentiamo graficamente le due soluzioni e cerchiamo di scrivere gli intervalli ottenuti senza soluzione di continuità.



La soluzione della disequazione irrazionale è:

$$x \leq -7-\sqrt{74} \ \vee \ x \geq -7+\sqrt{74} \tag{6.10}$$

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \tag{6.11}$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x)^2 \end{cases} \tag{6.12}$$

Il senso della formula risolutiva è che l'espressione $A(x)$ può essere solo positiva per le condizioni di esistenza. Se la radice è minore di un numero allora questo non può che essere positivo e quindi $B(x)$ è positiva. Se entrambe le espressioni sono positive la relazione tra le due vale anche facendo il quadrato delle espressioni.

Esercizio 23 *Risolvi la seguente disequazione:* $7x + 2 - \sqrt{3x^2 - 3x - 6} > 0$

Abbiamo una disequazione irrazionale con una sola radice quadrata: cominciamo a scriverla in forma normale, ponendo la radice quadrata da sola a primo membro.

$$\sqrt{3x^2 - 3x - 6} < 7x + 2 \tag{6.13}$$

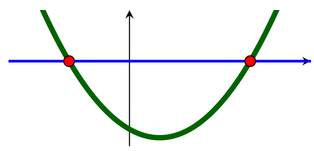
Adesso possiamo osservare che si tratta di una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$: usiamo lo schema risolutivo proposto qui sopra.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 6 \geq 0 \\ 7x + 2 > 0 \\ 3x^2 - 3x - 6 < (7x + 2)^2 \end{cases} \tag{6.14}$$

Dobbiamo risolvere un sistema: risolviamo le singole equazioni e *intersechiamo* le soluzioni.

Prima disequazione.

$$\begin{gathered} 3x^2 - 3x - 6 \geq 0 \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(3)(-6)}}{6} = \frac{3 \pm 9}{6} = \frac{1 \pm 3}{2} \\ x_1 = 2\,;\; x = -1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 2 \end{gathered} \tag{6.15}$$

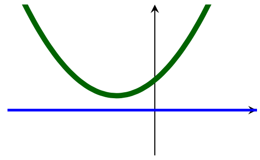


Seconda disequazione.

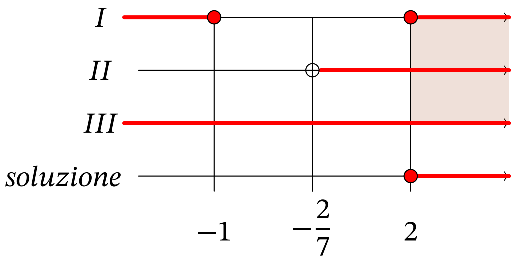
$$\begin{aligned} 7x + 2 &> 0 \\ 7x &> -2 \\ x &> -\frac{2}{7} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Terza disequazione.

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 3x - 6 &< (7x+2)^2 \\
3x^2 - 3x - 6 &< 49x^2 + 28x + 4 \\
46x^2 + 31x - 10 &> 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-31 \pm \sqrt{31^2 - 4(46)(10)}}{46 \cdot 2} \\
\Delta &= -879 < 0 \\
\forall x &\in \Re
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$



Intersezione tra le tre soluzioni. La terza potremmo anche non rappresentarla perché è soddisfatta per ogni valore di x.



La soluzione della disequazione irrazionale è infine $x \geq 2$.

Indice analitico