Equazioni differenziali

esercizi svolti e ordinati per competenze
e temi d'esame

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alle equazioni differenziali, quali si incontrano attualmente nel compito d'esame del liceo scientifico; sono pensati come una sintesi mirata. In particolare si è analizzata l'applicazione delle equazioni alla fisica, facendo riferimento a quanto si trova esposto anche nei libri di fisica.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso.
Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

2 Le equazioni differenziali

Equazione differenziale
Chiamiamo equazione differenziale un'equazione che lega tra loro una funzione incognita e le sue derivate.

L'*ordine di un'equazione differenziale* è l'ordine massimo con cui compare la derivata della funzione incognita.

Soluzione di una equazione differenziale
Si chiama soluzione di un'equazione differenziale in un intervallo I la funzione che, sostituita alla funzione incognita nell'equazione, la soddisfa per ogni $x \in I$.

In gran parte dei quesiti proposti all'esame di maturità del liceo scientifico non viene chiesto di risolvere un'equazione differenziale, ma bensì di verificare quale delle soluzioni proposte è quella giusta.

Esame 1 *Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione* $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ *è soluzione?*

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$
$$y' + x \cdot y'' = 1$$
$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$
$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

Per verificare di quale equazione differenziale è la soluzione la funzione data operiamo per sostituzione. Innanzi tutto:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1 - (1 - \ln x) \cdot 2}{x^3} \\ y'' &= \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Adesso sostituiamo.

1.

$$\frac{-3 + 2\ln x}{x^3} + 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} + 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x + 2 - 2\ln x}{x^3} = -\frac{1}{x^3} \neq \frac{\ln x}{x} \tag{2.3}$$

2.

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} + x \cdot \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{-3 + 2\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 3 + 2\ln x}{x^2} = \frac{-2 + \ln x}{x^2} \neq \frac{\ln x}{x} \tag{2.4}$$

3.

$$x \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \neq \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \tag{2.5}$$

4.

$$x^2 \cdot \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} + x \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{-3 + 2\ln x}{x} + \frac{1 - \ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{-3 + 2\ln x + 1 - \ln x + 2}{x} = \frac{\ln x}{x} \tag{2.6}$$

Quindi l'equazione giusta è la quarta.

Esame 2 *Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \Re$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.*

Operiamo per sostituzione come nell'esercizio precedente. Cominciamo col determinare la derivata prima e seconda della funzione proposta.

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2e^{kx+2} \cdot k = 2ke^{kx+2} \\ y''(x) &= 2ke^{kx+2} \cdot k = 2k^2e^{kx+2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} &2k^2e^{kx+2} - 2 \cdot 2ke^{kx+2} - 3 \cdot 2e^{kx+2} = 0 \\ &(2k^2 - 4k - 6)e^{kx+2} = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'esponenziale è in quanto tale sempre diverso da zero: allora per avere un'identità deve valere zero il polinomio tra parentesi.

$$\begin{aligned} &2k^2 - 4k - 6 = 0 \\ &k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} \\ &k_1 = \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ &k_2 = \frac{4-8}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Quindi il parametro k deve valore 3 o -1.

2.1 Il problema di Cauchy

Un'equazione differenziale in una funzione incognita $y(x)$, nella variabile x, e con le derivate della y (y', ... , y^n) può essere espressa in questo modo:

$$f(x, y(x), y'(x), ..., y^n(x)) = 0 \tag{2.10}$$

Problema di Cauchy
Chiamiamo problema di Cauchy quello di trovare la soluzione di una equazione differenziale:

$$f(x, y(x), y'(x), ..., y^n(x)) = 0 \tag{2.11}$$

conoscendo delle condizioni iniziali sulle sue variabili e funzioni.

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y_1 \\ &... \\ &y^{n-1}(x_0) = y_{n_1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Osserviamo che tutte le condizioni sono *relative allo stesso punto* $x = x_0$.
Altrimenti non abbiamo un problema di Cauchy, ma un'equazione differenziale con delle cosiddette *condizioni al contorno*, la cui soluzione in generale non è garantita dal alcun teorema.

Si può dimostrare che nell'intorno del punto x_0 sotto opportune condizioni (come la continuità delle funzioni coinvolte e delle loro derivate) il problema di Cauchy ha soluzione e questa soluzione è unica. Ai fini degli esercizi che si possono affrontare alle superiori mi sento di dire che non è importante sapere e soprattutto saper verificare se sussistono quelle condizioni, ma piuttosto sapere risolvere una equazione differenziale date delle opportune condizioni al contorno e quindi non necessariamente un problema di Cauchy.

3 Equazioni differenziali del primo ordine

3.1 Equazione del tipo $y^{'} = f(x)$

L'equazione differenziale del tipo $y' = f(x)$ si risolve integrando entrambe i membri dell'equazione:

$$\int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

Di conseguenza ha come integrale generale:

$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

Questo tipo di equazioni possono essere viste come un caso particolare di quelle lineari del primo ordine in cui $a(x) = 0$ e $b(x) = f(x)$.

Oppure semplicemente come la **ricerca delle primitive della funzione** $f(x)$.

Esercizio 1 *Risolvi la seguente equazione:* $y' - \cos x = 0$.

Abbiamo un'equazione del tipo $y' = f(x)$ in quanto $y' = \cos x$. La soluzione è:

$$y(x) = \int \cos \mathrm{d}x = -\sin x + c \tag{3.3}$$

Esercizio 2 *Risolvi l'equazione* $y' = x^3 - 5$ *sapendo che* $y(1) = 2$.

Abbiamo un'equazione del tipo $y' = f(x)$: troviamo l'integrale generale.

$$y(x) = \int (x^3 - 5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - 5x + c \tag{3.4}$$

Troviamo la soluzione particolare imponendo la condizione data.

$$\begin{aligned} y(1) &= 2 \\ y(1) &= \frac{1}{4} - 5 + c = 2 \\ c &= 2 + 5 - \frac{1}{4} = 7 - \frac{1}{4} = \frac{28-1}{4} = \frac{27}{4} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Infine la soluzione particolare è:

$$y(x) = \frac{x^4}{4} - 5x + \frac{27}{4} \tag{3.6}$$

3.2 Equazione a variabili separabili

L'equazione differenziale a variabili separabili ha la forma:

$$y'(x) = g(x)f(y(x)) \tag{3.7}$$

Ricordando la definizione di derivata $y'(x) = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ e separando le variabili possiamo scrivere:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)f(y) \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{se } f(x) \neq 0 \tag{3.8}$$

Ora basta integrare primo e secondo membro dell'equazione per ottenere formalmente la soluzione generale.

$$\int \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

Esame 3 *Data una funzione* $g : \Re \to \Re$ *ovunque derivabile, determina la funzione* $g(x)$ *in modo che sia soddisfatta l'equazione differenziale* $g'(x) = -2g(x)$ *e che risulti* $g(0) = 4$.

Abbiamo un'equazione a variabili separabili in cui quella che precedentemente abbiamo indicato come $f(y)$ è la funzione costante $f(y) = -2$. Esprimiamo la derivata in forma estesa, separiamo le variabili e integriamo i due membri dell'equazione.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} &= -2g(x) \\ \frac{\mathrm{d}g(x)}{g(x)} &= -2\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}g(x)}{g(x)} &= \int -2\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.10}$$

Gli integrali indefiniti darebbero ognuno una costante di integrazione distinta, ma la somma o differenza di due costanti d'integrazione è comunque uno stesso numero reale indefinito quindi la scriviamo solo a secondo membro, per semplicità espositiva.

$$\ln|g(x)| = -2x + c \tag{3.11}$$

L'equazione è formalmente risolta: dobbiamo scriverla in forma esplicita.

$$g(x) = \mathrm{e}^{-2x+c} \tag{3.12}$$

Abbiamo tolto il valore assoluto a primo membro perché l'esponenziale è sempre positivo.

Per trovare il valore della costante applichiamo le condizioni al contorno date, ovvero che $g(0) = 4$.

$$g(0) = \mathrm{e}^{-2\cdot 0+c} = \mathrm{e}^{c} = 4 \tag{3.13}$$

Applichiamo le proprietà delle potenze all'esponenziale per poter scrivere meglio l'espressione ed eliminare la c.

$$g(x) = \mathrm{e}^{-2x+c} = \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{c} = 4\,\mathrm{e}^{-2x} \tag{3.14}$$

Esercizio 3 *Risolvi l'equazione* $y' = y^3 \cos x$.

Abbiamo un'equazione differenziale a variabili separabili. Secondo lo schema prima indicato la funzione $g(x) = \cos x$ e la funzione $f(y) = y^3$.
Scriviamo la derivata della y in forma estesa e separiamo le variabili e integriamo.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^3 \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{y^3} &= \cos x \,\mathrm{d}x \\ \int y^{-3}\,\mathrm{d}y &= \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ \frac{y^{-2}}{-2} &= \sin x + c\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nel secondo passaggio precedente abbiamo supposto che $y \neq 0$. Verifichiamo se abbiamo escluso una qualche soluzione sostituendo la funzione $y = 0$ nell'equazione differenziale.

$$y' = 0 \tag{3.16}$$

La derivata della funzione nulla è essa stessa nulla: la funzione è una possibile soluzione.
Adesso esplicitiamo la y nella precedente soluzione.

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2y^2} &= \sin x + c \\ y^2 &= \frac{-1}{2(\sin x + c)} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{-1}{2(\sin x + c)}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

La soluzione generale dell'equazione è quindi:

$$y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\frac{-1}{2(\sin x + c)}} \tag{3.18}$$

3.3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Abbiamo due funzioni $a(x)$ e $b(x)$ continue (e quindi integrabili) in un intervallo I.
L'equazione differenziale lineare del primo ordine ha la forma:

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{3.19}$$

L'integrale generale di questa equazione è:

$$y = \mathrm{e}^{A(x)}\left(\int \mathrm{e}^{-A(x)}b(x)\,\mathrm{d}x + c\right) \tag{3.20}$$

dove $A(x)$ è una primitiva della funzione $a(x)$.

Quando $b(x) = 0$ l'equazione è detta *omogenea*; quando $a(x)$ e $b(x)$ sono costanti l'equazione è detta *a coefficienti costanti*.

Casi particolari

Equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea e a coefficienti costanti
É del tipo:

$$y' = ay \tag{3.21}$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} \tag{3.22}$$

Equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea
É del tipo:

$$y' = a(x)y \tag{3.23}$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = k\,\mathrm{e}^{A(x)} = k\,\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} \tag{3.24}$$

4 Temi d'esame

1 *Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione* $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ *è soluzione?*

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$
$$y' + x \cdot y'' = 1$$
$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$
$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

Soluzione *Sessione ordinaria 2015, quesito n°4.*

2 *La popolazione di una colonia di batteri è di* 4000 *batteri al tempo* $t = 0$ *e di* 6500 *al tempo* $t = 3$. *Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot y$, *dove* k *è una costante e* y *la popolazione di batteri al tempo* t.
Al tempo $t = 10$, *la popolazione supererà i* 20000 *batteri?*

Soluzione *Sessione ordinaria 2015 (Boreale), quesito n°6.*

3 *Si consideri questa equazione differenziale:* $y'' + 2y' + 2y = x$. *Quale delle seguenti funzioni ne è la soluzione? Si giustifichi la risposta.*

a) $y = \mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + x$ b) $y = 2\mathrm{e}^{-x} + x$

c) $y = \mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + \dfrac{1}{2}(x - 1)$ d) $y = \mathrm{e}^{-2x} + x$

Sessione suppletiva 2016, quesito n°1.

4 *Data una funzione* $\mathrm{g} : \Re \to \Re$ *ovunque derivabile, determina la funzione* $\mathrm{g}(x)$ *in modo che sia soddisfatta l'equazione differenziale* $\mathrm{g}'(x) = -2\mathrm{g}(x)$ *e che risulti* $\mathrm{g}(0) = 4$.

Soluzione *Sessione suppletiva 2017, Problema n°2 - quesito n°2.*

5 *Determinare quali sono i valori del parametro* $k \in \mathfrak{R}$ *per cui la funzione* $y(x) = 2\mathrm{e}^{kx+2}$ *è soluzione dell'equazione differenziale* $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Soluzione *Sessione ordinaria 2018, quesito n°10.*

6 *Verificare che la funzione* $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ *è soluzione dell'equazione differenziale*
$y'' + 2y' + 2y = 0$.

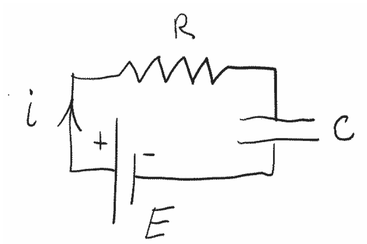
Sessione suppletiva 2018, quesito n°10.

Parte I

Applicazioni

5 Circuito RC

Un circuito RC è costituito da una resistenza R, da un condensatore di capacità C e da un generatore ideale di forza elettromotrice E.



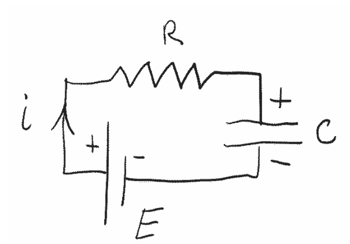
Se percorriamo il circuito nel verso della corrente abbiamo:

1. Una salita di tensione E ai capi del generatore.
2. Una caduta di tensione Ri ai capi della resistenza.
3. Una caduta di tensione V_c ai capi del condensatore (quando è carico).

5.1 Carica del condensatore

5.1.1 Descrizione fisica

Se il condensatore è inizialmente scarico e chiudiamo il circuito, immediatamente inizierà a circolare corrente partendo dal valore iniziale $i_0 = \frac{E}{R}$.



Il condensatore, inizialmente scarico, comincerà a caricarsi per il passaggio della corrente: le cariche positive dal generatore confluiscono su una armatura del condensatore che si carica anch'essa positivamente; la stessa cosa, ma con cariche negative, per l'altra armatura. Tuttavia la differenza di potenziale tra le armature è come quella di un generatore di forza elettromotrice opposto al generatore dato e si opporrà sempre più al passaggio della corrente; alla fine (idealmente dopo un tempo infinito) non circolerà più corrente.

5.1.2 Derivazione matematica

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$E - Ri - V_c = 0 \tag{5.1}$$

Ricordando la definizione di capacità ($C = \frac{q}{V_c}$) e di intensità di corrente ($i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) possiamo anche scrivere:

$$E - R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} = 0 \tag{5.2}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $q(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il metodo della separazione delle variabili: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita q e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned}
E - \frac{q}{C} &= R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\
\frac{EC - q}{C} &= R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\
\frac{EC - q}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{EC - q} \\
-\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{q - q_0}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito il prodotto EC con la carica q_0 che il condensatore raggiunge dopo un tempo infinito; inoltre abbiamo cambiato il segno al denominatore del secondo membro (da cui il meno a primo membro) per rendere più semplice i passaggi successivi.

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita. Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui chiudiamo il circuito ad un instante finale t_f, ovvero tra quanto la carica del condensatore è zero a quando raggiunge il valore q_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} = \int_0^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q - q_0} \tag{5.4}$$

Nel primo integrale RC è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale ha la forma di un rapporto in cui a numeratore compare la derivata del denominatore: quindi è un integrale di questo tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{5.5}$$

dove $f(x) = q - q_0$ e $f'(x) = 1$.

Scriviamo allora:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \int_0^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q-q_0} \\
\left[-\frac{t}{RC}\right]_0^{t_f} &= [\ln(q_0-q)]_0^{q_f} \\
-\frac{t_f}{RC} &= (\ln(q_f-q_o)-\ln(-q_0)) \\
-\frac{t_f}{RC} &= \ln\left(\frac{q_f-q_0}{-q_0}\right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza $q(t)$. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

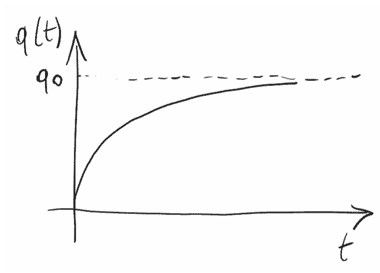
$$\begin{aligned}
\frac{q_f-q_0}{-q_0} &= \mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f-q_0 &= -q_0\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f &= q_0-q_0\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f &= q_0(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}})
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.1.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente, considerando che t_f è un t generico e $q_f = q(t)$ troviamo infine:

$$q(t) = q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{5.8}$$

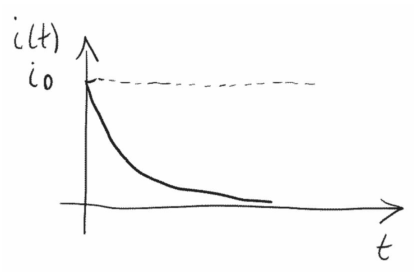
abbiamo trovato la quantità di carica presente nel condensatore dopo un tempo t dalla chiusura del circuito.



Ricordando la definizione di intensità di corrente come derivata della quantità di carica rispetto al tempo possiamo scrivere:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q_0\frac{d(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} = -q_0\frac{d(e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} = -q_0(e^{-\frac{t}{RC}})(-\frac{1}{RC}) = \frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{EC}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.9}$$

dove $\frac{E}{R} = i_0$ è l'intensità di corrente iniziale.



Inoltre la tensione ai capi del condensatore è $V_c = Cq(t)$

$$V_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{5.10}$$

dove $EC = q_0$

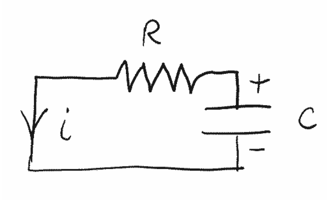
5.2 Scarica del condensatore

5.2.1 Descrizione fisica

Se il condensatore è inizialmente carico e chiudiamo il circuito escludendo il generatore di tensione, immediatamente inizierà a circolare corrente partendo dal valore iniziale $i_0 = \frac{V_c}{R}$.

Il condensatore, inizialmente carico, comincerà a scaricarsi con il passaggio della corrente e alla fine (idealmente dopo un tempo infinito) non circolerà più corrente.

Il verso della corrente è formalmente opposto a quello della fase di carica, ma di questo non terremo conto nell'esposizione successiva.



5.2.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$-Ri - V_c = 0 \tag{5.11}$$

Ricordando la definizione di capacità ($C = \frac{q}{V_c}$) e di intensità di corrente ($i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) possiamo anche scrivere:

$$-R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} = 0 \tag{5.12}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $q(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il metodo della separazione delle variabili: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita q e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned} -\frac{q}{C} &= R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{q}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{q} \end{aligned} \tag{5.13}$$

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita.

Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui chiudiamo il circuito ad un instante finale t_f, ovvero tra quanto la carica del condensatore è il valore iniziale q_0 a quando raggiunge il valore q_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} = \int_{q_0}^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q} \tag{5.14}$$

Nel primo integrale RC è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale ha la forma del reciproco della variabile di integrazione: è del tipo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \tag{5.15}$$

Nel nostro caso x è la carica ed è certamente positiva: per cui non scriviamo il valore assoluto. Scriviamo allora:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \int_{q_0}^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q} \\
\left[-\frac{t}{RC}\right]_0^{t_f} &= [\ln(q)]_{q_0}^{q_f} \\
-\frac{t_f}{RC} &= (\ln(q_f) - \ln(q_0)) \\
-\frac{t_f}{RC} &= \ln\left(\frac{q_f}{q_0}\right)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza q_f. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

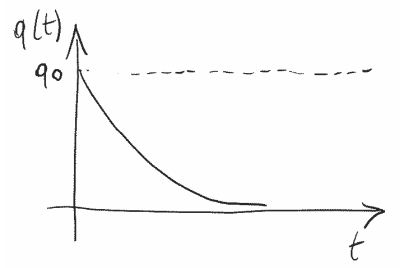
$$\begin{aligned}
\frac{q_f}{q_0} &= \mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f &= q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

5.2.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente, considerando che t_f è un t generico e $q_f = q(t)$ troviamo infine::

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.18}$$

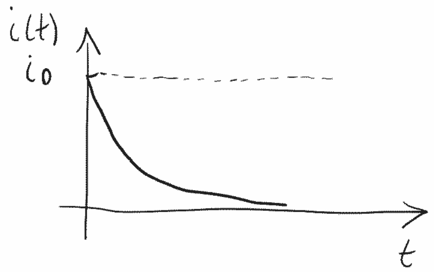
Abbiamo trovato la quantità di carica presente nel condensatore dopo un tempo t dalla chiusura del circuito.



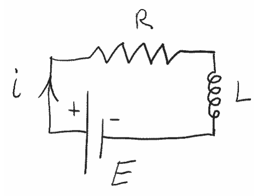
Ricordando la definizione di intensità di corrente come derivata della quantità di carica rispetto al tempo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = q_0 \frac{\mathrm{d}\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{\mathrm{d}t} = q_0 \left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \\ -\frac{V_c C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{V_c}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -i_0 e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{5.19}$$

dove $\frac{V_c}{R} = i_0$ è l'intensità di corrente iniziale. Il segno meno indica che il verso della corrente è opposto a quello complessivo della fase di carica, a parità di configurazione e circuito.



6 Circuito RL



Un circuito RL è costituito da una resistenza R, da un induttore di induttanza L e da un generatore ideale di forza elettromotrice E.

Se percorriamo il circuito nel verso della corrente abbiamo:

1. Una salita di tensione E ai capi del generatore.
2. Una caduta di tensione Ri ai capi della resistenza.
3. Una caduta di tensione $-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ai capi dell'induttore.

6.1 Chiusura del circuito

6.1.1 Descrizione fisica

Supponiamo che il circuito sia aperto e non circoli corrente. Se lo chiudiamo la variazione di corrente produrrà una corrente nell'induttore per autoinduzione, *corrente detta di extrachiusura*, che si opporrà alla variazione che l'ha generata cioè la corrente prodotta dal generatore. La conseguenza complessiva è una corrente che parte da zero all'istante della chiusura del circuito e poi (tipicamente con tempi di pochi millisecondi) va a regime con una intensità $i_0 = \frac{E}{R}$.

6.1.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$E - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.1}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $i(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il *metodo della separazione delle variabili*: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita i e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{gathered} E - Ri = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}t}{L} = \frac{\mathrm{d}i}{E - Ri} \end{gathered} \tag{6.2}$$

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita. Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui chiudiamo il circuito ad un instante t_f, ovvero tra quanto la corrente è zero a quando raggiunge il valore i_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} \frac{\mathrm{d}t}{L} = \int_0^{i_f} \frac{\mathrm{d}i}{E - Ri} \tag{6.3}$$

Nel primo integrale $1/L$ è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale può essere visto come un rapporto in cui a numeratore compare (a parte il segno e una costante) la derivata del denominatore: quindi è un integrale di questo tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{6.4}$$

dove $f(x) = E - Ri$ e $f'(x) = -R$.

Moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro per $-R$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} \frac{\mathrm{d}t}{L} &= -\frac{1}{R}\int_0^{i_f} \frac{-R\,\mathrm{d}i}{E - Ri} \\
\int_0^{t_f} -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{i_f} \frac{-R\,\mathrm{d}i}{E - Ri} \\
\left[-\frac{R}{L}t\right]_0^{t_f} &= [\ln(E - Ri)]_0^{i_f} \\
-\frac{R}{L}t_f &= (\ln(E - Ri_f) - \ln(E)) \\
-\frac{R}{L}t_f &= \ln\left(\frac{E - Ri_f}{E}\right)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza $i(t)$. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

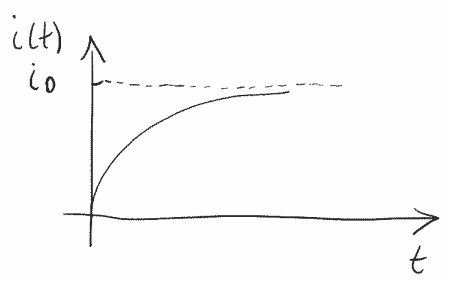
$$\begin{aligned}
\frac{E - Ri_f}{E} &= \mathrm{e}^{-t_f\frac{R}{L}} \\
E - Ri_f &= E\mathrm{e}^{-t_f\frac{R}{L}} \\
Ri_f &= E - E\mathrm{e}^{-t_f\frac{R}{L}} \\
i_f &= \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t_f\frac{R}{L}})
\end{aligned} \tag{6.6}$$

6.1.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente troviamo infine:

$$i(t) = i_0(1 - e^{-t\frac{R}{L}}) \tag{6.7}$$

abbiamo trovato l'intensità di corrente che circola dopo un tempo t dalla chiusura del circuito. Abbiamo la somma di due termini: la corrente che circolerebbe nel corrispondente circuito con la sola resistenza R e l'*extracorrente di chiusura* che si oppone alla istantanea variazione di corrente dal valore nullo iniziale.



6.2 Apertura del circuito in cui circolava corrente

6.2.1 Descrizione fisica

Se nell'induttore circola corrente in esso si crea un campo magnetico e si accumula energia (energia cinetica associata alle cariche) Se apriamo il circuito, escludendo il generatore, la corrente con passa immediatamente a zero, ma decresce esponenzialmente a causa della differenza di potenziale presente ai capi dell'induttore che determina una cosiddetta extracorrente di apertura.

6.2.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$-Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.8}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $i(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il *metodo della separazione delle variabili*: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita i e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned} -Ri &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}i}{i} \end{aligned} \tag{6.9}$$

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita. Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui apriamo il circuito ad un istante t_f ovvero tra quanto la corrente è i_0 (il valore presente un'istante prima di aprire il circuito) a quando raggiunge il valore i_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t = \int_{i_0}^{i_f} \frac{\mathrm{d}i}{i} \tag{6.10}$$

Nel primo integrale $-R/L$ è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale ha la forma del reciproco della variabile di integrazione: è del tipo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \tag{6.11}$$

Nel nostro caso x è la corrente ed è certamente positiva: per cui non scriviamo il valore assoluto.

$$\begin{aligned} \left[-\frac{R}{L}t\right]_0^{t_f} &= [\ln(i)]_{i_0}^{i_f} \\ -\frac{R}{L}t_f &= (\ln(i_f) - \ln(i_0)) \\ -\frac{R}{L}t_f &= \ln\left(\frac{i_f}{i_0}\right) \end{aligned} \tag{6.12}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza i_f. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

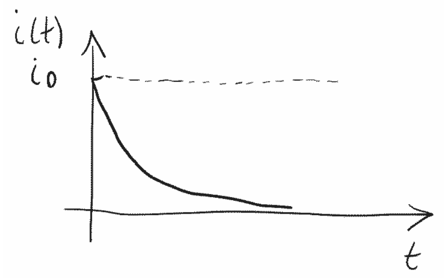
$$\begin{aligned} \frac{i_f}{i_0} &= \mathrm{e}^{-t_f \frac{R}{L}} \\ i_f &= i_0 \mathrm{e}^{-t_f \frac{R}{L}} \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente troviamo infine:

$$i(t) = i_0 \mathrm{e}^{-t \frac{R}{L}} \tag{6.14}$$

Abbiamo trovato l'intensità di corrente che circola dopo un tempo t dalla apertura del circuito: si tratta totalmente di una *extracorrente di apertura*.



Indice analitico