

Funzioni

sintesi per un ripasso

Massimiliano Virdis

Indice

1	Funzioni	1
1.1	Classificazione	1
2	Funzioni esponenziali	3
3	Funzioni logaritmiche	5
4	Funzioni goniometriche	7
4.1	Grafici	8
4.2	Angoli notevoli ed associati	9
4.3	Altre formule	10
5	Ricerca del dominio	11

Chiamiamo **funzione** una legge che associa ad ogni elemento di un insieme A uno e un solo elemento di un insieme B . L'insieme A è detto *dominio*, l'insieme B è detto *codominio*.

Se un elemento x del dominio è associato ad un elemento y del codominio possiamo scrivere:

$$y = f(x) \quad (1.1)$$

dove f (effe) è il simbolo per indicare la funzione e y è detto *immagine* di x attraverso la funzione.

L'insieme delle immagini di tutti gli elementi del dominio è detta *immagine*. L'immagine della funzione è un sottoinsieme del codominio.

1.1 Classificazione

Classificazione delle funzioni			
Algebriche		Trascendenti	
Razionali	Irrazionali	Esponenziali	Logaritmiche
		Goniometriche	
Intere		Fratte	

La distinzione fondamentale è tra funzioni algebriche e trascendenti.

- Chiamiamo funzioni **algebriche** quelli in cui le variabili sono sottoposte solo ad operazioni algebriche cioè le quattro operazioni fondamentali, l'elevamento a potenza intera e l'estrazione di radice.
- Sono **trascendenti** tutte le altre.

Altra distinzione è tra funzioni intere e fratte.

- Chiamiamo funzioni **intere** quelle in cui le variabili non stanno a denominatore di una frazione.
- Sono **fratte** tutte le altre.

Tra le algebriche abbiamo le funzioni *razionali*, dove non compare l'estrazione di radice, e le funzioni *irrazionali*.

Le funzioni razionali intere sono i polinomi.

2

Funzioni esponenziali

Proprietà delle potenze

$$a \in \mathbb{R} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

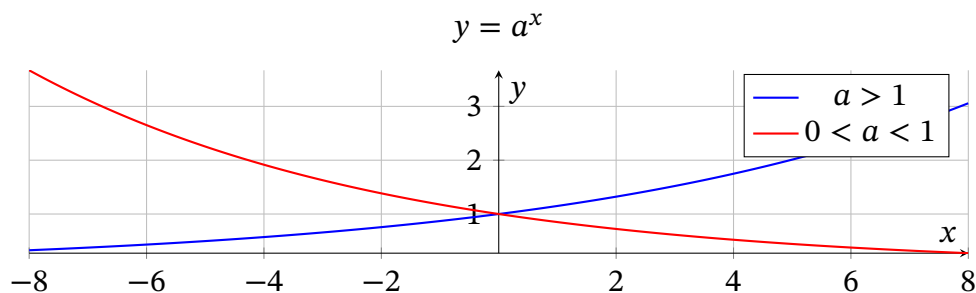
Una funzione esponenziale ha la forma di una potenza con base a e esponente x .

$$y = a^x \quad ; \quad a > 0 \wedge a \neq 1 \quad ; \quad x \in \mathfrak{R} \qquad (2.1)$$

Il *dominio* è dato da tutti i numeri reali.

Il *codominio* è dato da tutti i reali positivi: la funzione esponenziale non si annulla mai.

Tutti gli esponenziali passano per il punto di coordinate $P(0; 1)$.



Se la base è compresa tra zero e uno la funzione è decrescente.

Se la base è maggiore di uno la funzione è crescente.

3

Funzioni logaritmiche

Il logaritmo in base a di un numero x è l'esponente a cui si deve elevare la base per ottenere tale numero.

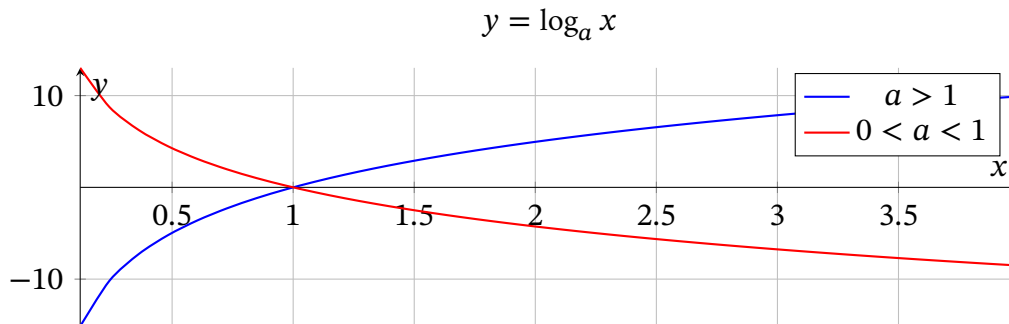
Una funzione logaritmica con base a e esponente x è l'inversa di una funzione esponenziale a^x .

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \quad ; \quad a > 0 \wedge a \neq 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

Il *dominio* è dato da tutti i numeri reali positivi.

Il *codominio* è dato da tutti i reali.

Tutti i logaritmi passano per il punto di coordinate $P(1;0)$.



Se la base è compresa tra zero e uno la funzione è decrescente.

Se la base è maggiore di uno la funzione è crescente.

Proprietà dei logaritmi

$\{a, x, y\} \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy \quad \log_a x^b = b \log_a x$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

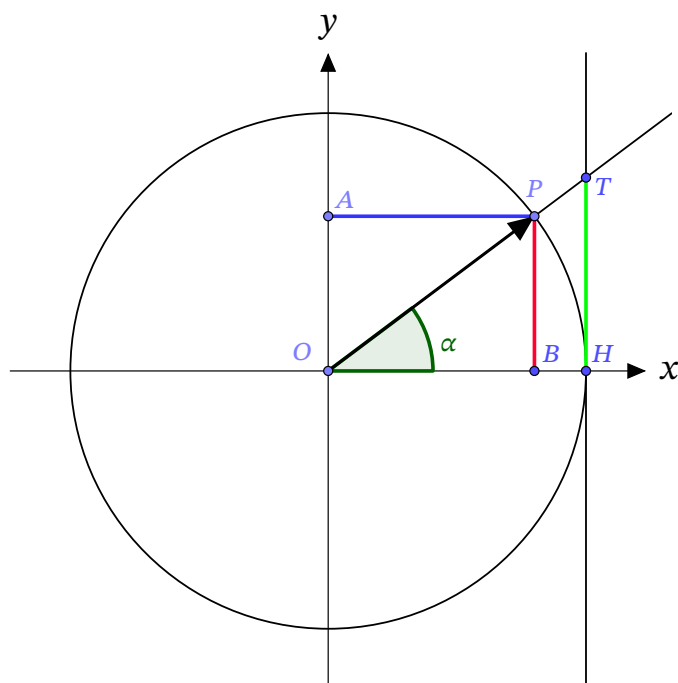
$$x = a^{\log_a x}$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

4

Funzioni goniometriche

Abbiamo una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine degli assi cartesiani. Prendiamo gli angoli al centro della circonferenza orientati che hanno come primo lato il semiasse positivo delle x e come secondo lato il raggio vettore indicato in figura. Questo raggio vettore intercetta la circonferenza nel punto P .



- Chiamiamo **seno** dell'angolo l'ordinata del punto P .
- Chiamiamo **coseno** dell'angolo l'ascissa del punto P .
- Chiamiamo **tangente** dell'angolo il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa del punto P .

$$\sin \alpha = \overline{PB} \quad ; \quad \cos \alpha = \overline{PA} \quad ; \quad \tan \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \quad (4.1)$$

La tangente dell'angolo è anche l'ascissa del punto di intersezione T tra il raggio vettore dell'angolo e la tangente alla circonferenza nel punto H di coordinate $(1; 0)$.

$$\tan \alpha = \overline{TH} \quad (4.2)$$

Per ogni angolo possiamo trovare un punto P e quindi sempre un'ascissa e un'ordinata.

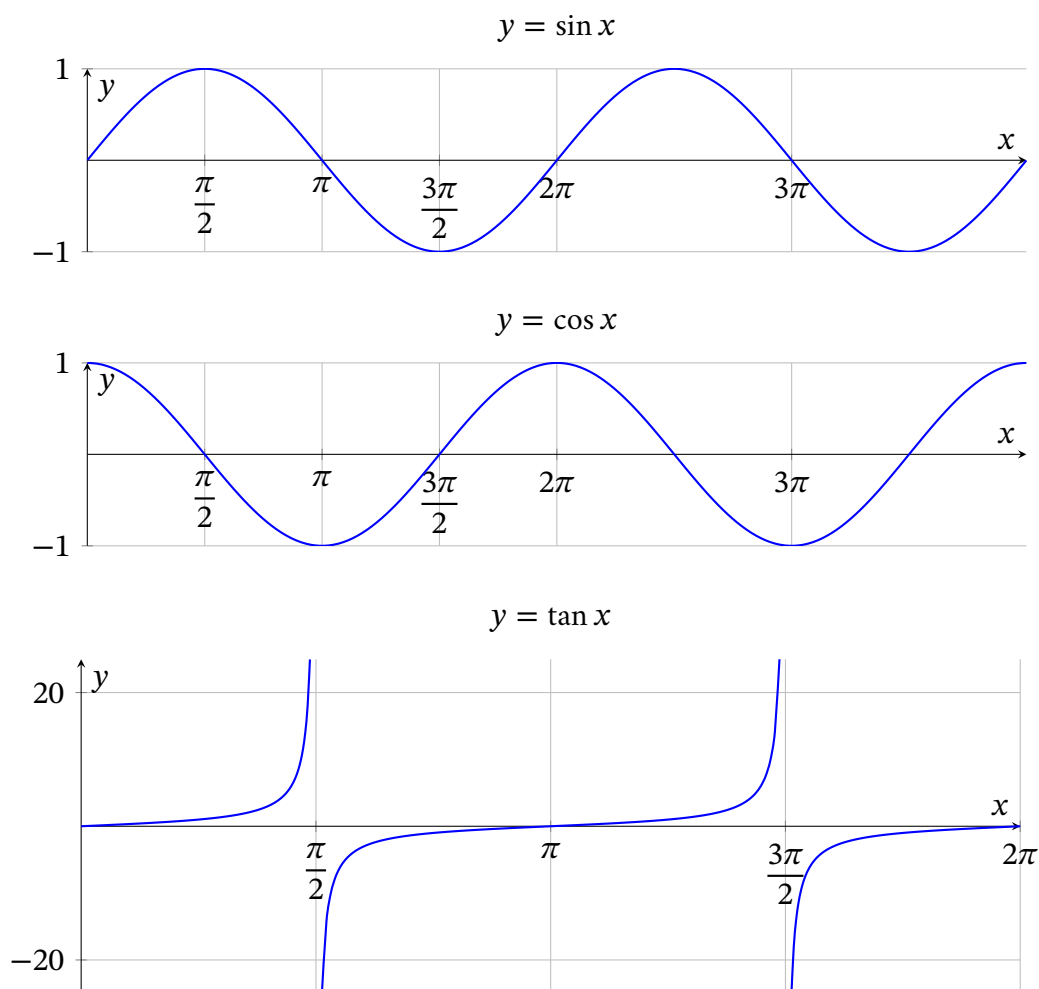
Non possiamo trovare sempre il rapporto perché non avrebbe significato quando il denominatore e quindi l'ascissa fosse uguale zero. Di conseguenza possiamo calcolare il seno e il coseno di qualsiasi angolo; invece non possiamo calcolare la tangente di $\frac{\pi}{2}$ e di $\frac{3\pi}{2}$.

- Il dominio della funzione $y = \sin \alpha$ è $\forall x \in \mathfrak{R}$
- Il dominio della funzione $y = \cos \alpha$ è $\forall x \in \mathfrak{R}$
- Il dominio della funzione $y = \tan \alpha$ è $\forall x \in \mathfrak{R} - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\}$

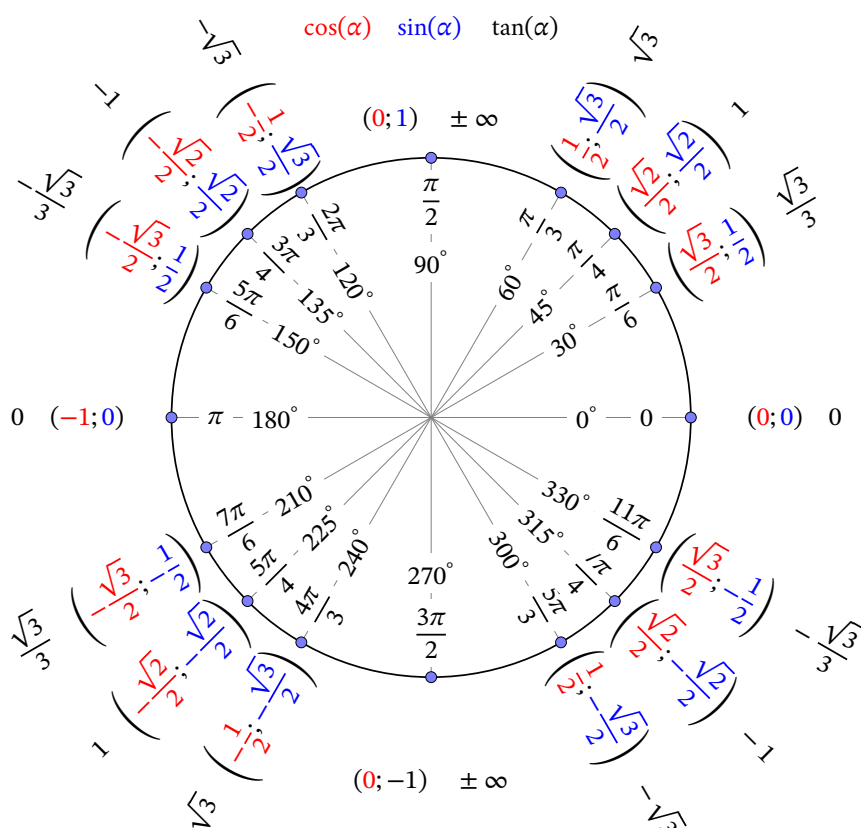
Il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto P , essendo confinato sulla circonferenza, è sempre compreso tra 1 e -1 .

- Il codominio della funzione $y = \sin \alpha$ è $[-1 : 1]$
- Il codominio della funzione $y = \cos \alpha$ è $[-1 : 1]$
- Il codominio della funzione $y = \tan \alpha$ è $\forall x \in \mathfrak{R}$

4.1 Grafici



4.2 Angoli notevoli ed associati



$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha)$

Regola mnemonica

- Se l'argomento di partenza contiene un multiplo di π allora la funzione non cambia nome
- Se l'argomento di partenza contiene un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ allora la funzione cambia nome
- Il segno finale è determinato dal segno della funzione a primo membro nel suo quadrante

4.3 Altre formule

Formule di trasformazione

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \qquad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \pm \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha) = \pm \frac{|\tan(\alpha)|}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \qquad \cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

prostaferesi

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

5

Ricerca del dominio

Il dominio di una funzione è l'insieme di valore più grande che possiamo attribuire alla sua variabile indipendente.

In termini generali, per determinare il dominio di una funzione, se la funzione è composta partiamo dallo studio delle funzioni più interne e poi studiamo via via quelle più esterne; se non è composta è opportuno conoscere il dominio delle funzioni elementari.

Altrimenti possiamo procedere così.

1. Se una funzione è **somma** di più addendi cerchiamo il dominio di ogni singolo addendo e poi prendiamo l'intersezione dei domini trovati ovvero prendiamo come dominio l'insieme che soddisfa il dominio di tutti gli addendi.
2. Se una funzione è **prodotto** di più fattori cerchiamo il dominio di ogni singolo fattore e poi prendiamo l'intersezione dei domini trovati ovvero prendiamo come dominio l'insieme che soddisfa il dominio di tutti i fattori.
3. Se una funzione è **rapporto** tra due funzioni cerchiamo il dominio del numeratore e poi del denominatore e poi prendiamo l'intersezione dei domini trovati ovvero prendiamo come dominio l'insieme che soddisfa il dominio di tutti i fattori. Ricordiamoci che il denominatore deve essere diverso da zero.
4. Altrimenti, se non siamo in nessuno dei precedenti casi, guardiamo l'espressione dalla sua parte più interna ovvero da dove compare la variabile (la x). Avremo sicuramente una funzione composta: dobbiamo studiare il dominio a partire dalla funzione di partenza allargando l'analisi via via alle funzioni più esterne.

