Limiti

esercizi svolti e ordinati per competenze

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione **1**
1.1 Licenza e Copyright 1
1.2 Ringraziamenti 1

I Calcolo dei limiti **3**

2 Funzioni continue **5**
2.1 Funzioni elementari 5
2.2 Esempi di limiti di funzioni continue in un punto 6
2.3 Algebra dei limiti 6

3 Limiti con zeri e infiniti **7**
3.1 Andamento di funzioni elementari 8
3.2 Algebra dei limiti 10
3.3 Limiti da destra o da sinistra 12
3.3.1 Primo metodo 12
3.3.2 Secondo metodo 13
3.4 Limiti con somme 14
3.5 Limiti con prodotti 15
3.6 Limiti con rapporti 16

II Applicazioni dei limiti **17**

4 Discontinuità e singolarità **19**

5 Asintoti **21**

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi al calcolo dei limiti, quali si studiano attualmente al liceo scientifico; sono pensati come sintesi per un ripasso, soprattutto per gli alunni più in difficoltà. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso.
Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Parte I

Calcolo dei limiti

2 Funzioni continue

Una funzione $f(x)$, definita in un intorno completo di un punto x_0, si dice **continua** in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2.1}$$

Le funzioni sono considerate continue in tutti i loro punti isolati.

Detto diversamente: *se sappiamo che una funzione è continua* in un punto, e vogliamo calcolare il suo limite quando la variabile tende a quel punto, *basta calcolarne il valore* in quello stesso punto.

Il problema è sapere se una funzione è continua.

Tutte le funzioni elementari, nel loro campo di esistenza, sono continue.

2.1 Funzioni elementari

- *Funzioni polinomiali* $\quad f(x) = a_n x^n + ...a_1 x + a_0$
  Il dominio è $\mathfrak{R}$.
  Anche la funzione constante $f(x) = k$ la possiamo considerare un polinomio $f(x) = a_0$.
- *Esponenziali* $\quad f(x) = a^x$
  Il dominio è $\mathfrak{R}$.
- *Logaritmi* $\quad f(x) = log_a x$
  Il dominio è $x > 0$.
- *Funzioni goniometriche*
  $f(x) = \sin(x)$ Il dominio è $\mathfrak{R}$.
  $f(x) = \cos(x)$ Il dominio è $\mathfrak{R}$.
  $f(x) = \tan(x)$ Il dominio è $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- *Radici* $\quad f(x) = \sqrt[n]{x}$
  se l'esponente è pari il dominio è $x \geq 0$
  se l'esponente è dispari il dominio è $\mathfrak{R}$.

Una funzione, composizione di funzioni continue, è a sua volta continua all'interno del suo campo di esistenza.

Le conoscenze precedenti sono la prima strada per poter calcolare un limite.

2.2 Esempi di limiti di funzioni continue in un punto

Esercizio 1

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 - 4$$

La precedente funzione è continua nel punto $x = 2$?
Sì, in quanto si tratta di un polinomio. Per cui possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 - 4 = 3(2)^2 - 4 = 3 \cdot 4 - 4 = 8 \tag{2.2}$$

Esercizio 2

$$\lim_{x\to 0} e^{2x} - 2e^x + 4$$

La precedente funzione è continua nel punto $x = 0$?
Sì, in quanto si tratta della somma di tre funzioni: la prima è l'esponenziale di un polinomio; la seconda una costante per un esponenziale; la terza una costante. Tutte e tre sono funzioni continue o composizione di funzioni continue nel punto dato. Per cui possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0} e^{2x} - 2e^x + 4 = e^0 - 2e^0 + 4 = 1 - 2 + 4 = 3 \tag{2.3}$$

2.3 Algebra dei limiti

Così come la composizione di funzioni continue ci porta ad avere nuove funzioni anch'esse continue analogamente possiamo, con alcune attenzioni, eseguire le quattro operazioni fondamentali anche operando sui limiti con delle regole che vengono dette "algebra dei limiti".

Abbiamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite entrambe in un intorno di un punto x_0 e per le quali esistono finiti i limiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$.

- $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = l_1 - l_2$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, se $l_2 \neq 0$

Queste regole valgono anche per funzioni non continue.

3 Limiti con zeri e infiniti

La definizione di continuità di una funzione in un punto prevede che esista un intorno completo di quel punto. Se siamo agli estremi del campo di esistenza di una funzione possiamo individuare solo un intorno destro o sinistro. Se abbiamo solo un intorno destro o sinistro possiamo parlare comunque di continuità da destra e da sinistra.

Una funzione $f(x)$, definita in un intorno di un punto x_0, si dice **continua da destra** in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \tag{3.1}$$

Una funzione $f(x)$, definita in un intorno di un punto x_0, si dice **continua da sinistra** in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \tag{3.2}$$

Il significato del simbolo x_0^+ è quello di considerare numeri *eccedenti* il punto x_0 ovvero in un intorno destro del punto, così come quello del simbolo x_0^- è quello di considerare numeri *inferiori* al punto x_0 ovvero in un intorno sinistro del punto. Questo ha senso solo nell'ambito delle operazioni che portano a indicare e trovare il limite. Nel risultato finale quello che eventualmente otteniamo è sempre e solo un numero.

Il senso delle espressioni da destra e da sinistra fa riferimento al fatto che solitamente, ma non obbligatoriamente, tracciamo la retta dei numeri reali con il verso positivo che va da sinistra verso destra e quindi, graficamente, i numeri eccedenti il punto dato stanno alla sua destra, mentre quelli inferiori stanno alla sua sinistra.

Una funzione $f(x)$, definita solo in un intorno destro o sinistro di un punto x_0, si dice **continua** in x_0 se è continua da destra o da sinistra.

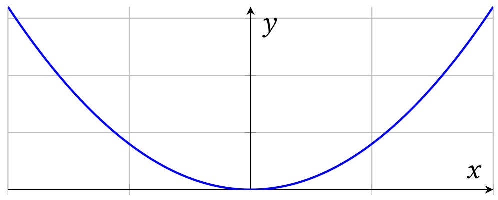
Questa ultima definizione consente di estendere il concetto di continuità agli estremi del dominio di una funzione.

I *punti isolati*, anche se non si può calcolare un limite per x che tenda ad essi, sono convenzionalmente considerati punti di continuità.

3.1 Andamento di funzioni elementari

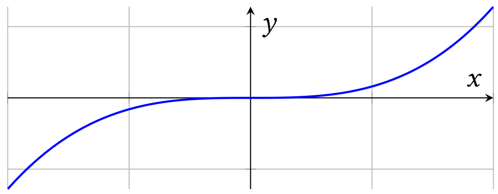
x^n con n pari

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$$



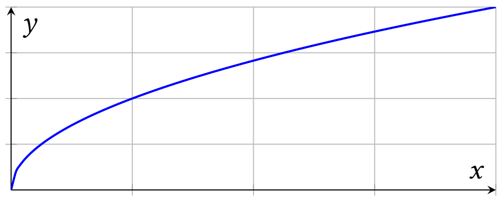
x^n con n dispari

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty$$



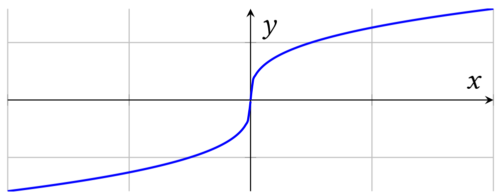
$\sqrt[n]{x}$ con n pari

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$



$\sqrt[n]{x}$ con n dispari

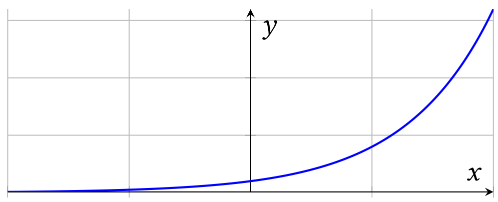
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$$



a^x con $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

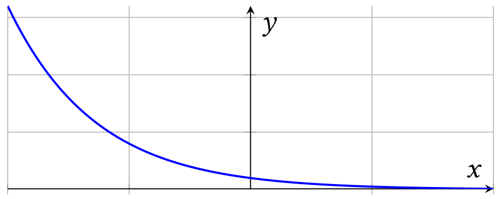
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$



a^x con $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

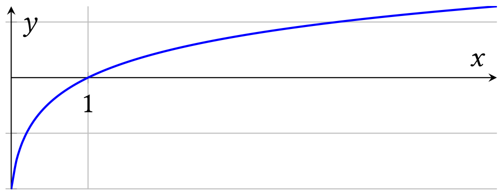
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$



$\log_a(x)$ con $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

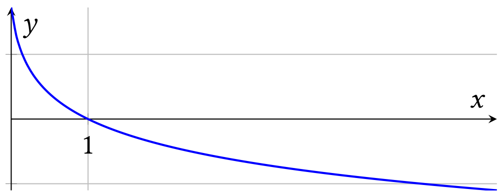
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$$



$\log_a(x)$ con $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

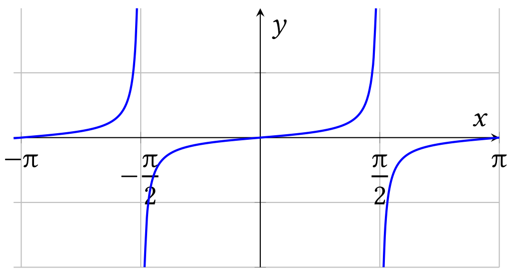
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$$



$\tan(x)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

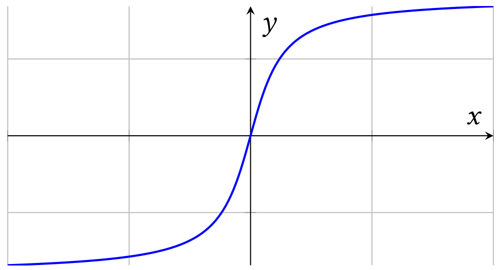
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$



$\arctan(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$



Inoltre:
L'andamento di un polinomio, per x che tende all'infinito, è determinato dalla potenza maggiore del polinomio.
Il limite delle funzioni seno e coseno, per x che tende all'infinito, non esiste.

3.2 Algebra dei limiti

Adesso che conosciamo il comportamento delle funzioni elementari anche agli estremi del loro campo di esistenza possiamo costruire un'algebra dei limiti che possa tener conto anche di limiti infiniti o con rapporti in un cui compaia uno zero a denominatore.

somme

$\lim f(x)$	$\lim f(x)$	$\lim[f(x) + g(x)]$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indet.

Possiamo tranquillamente sommare limiti finiti con limiti infiniti: unico problema è la somma tra infiniti di segno opposto in quanto non sappiamo quale dei due valori prevalga su l'altro.

prodotti

$\lim f(x)$	$\lim f(x)$	$\lim[f(x) \cdot g(x)]$
$l > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l < 0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	indet.

Possiamo tranquillamente moltiplicare limiti finiti con limiti infiniti con le usuale regole per i segni: unico problema è il prodotto tra infiniti e limiti nulli in quanto non sappiamo quale dei due valori prevalga su l'altro.

rapporto

$\lim f(x)$	$\lim f(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$m > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$m < 0$	$\mp\infty$
$l > 0$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$l < 0$	$0^{\pm}$	$\mp\infty$
$+\infty$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$-\infty$	$0^{\pm}$	$\mp\infty$
∞	∞	indet.
0	0	indet.

I rapporti tra limiti finiti e infiniti non danno particolari problemi: unici problemi sono i rapporti tra limiti entrambi infiniti o nulli in quanto non sappiamo se prevale il numeratore o il denominatore.

Oltre alle forme indeterminate prima esposte ne esistono altre tre. Le elenchiamo qui di seguito tutte quante.

$$+\infty - \infty \quad \infty \cdot 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^{\infty} \quad \infty^{0} \quad 0^{0} \tag{3.3}$$

3.3 Limiti da destra o da sinistra

Negli esercizi seguenti indicherò anche nel risultato se il limite è intendersi da destra o da sinistra: questo solo come esercizio, soprattutto per i limiti in cui abbiamo uno $0^{\pm}$ in cui la questione è determinare il segno del risultato finale. Qui il risultato è propriamente solo un numero.

Normalmente non viene indicata alcuna regola su come maneggiare gli x_0^+ e gli x_0^-: qui di seguito propongo qualche indicazione.

3.3.1 Primo metodo

Se x_0^+ è un numero un po' più grande di x_0 possiamo intenderlo come se fosse un x_0 più un numero molto piccolo, ad esempio uno 0,01, e se x_0^- è un numero un po' più piccolo di x_0 possiamo intenderlo come se fosse un x_0 meno un numero molto piccolo, ad esempio uno 0,01.

Questo metodo non da garanzie di successo in ogni occasione, soprattutto nel caso in cui il limite non esista e nell'intorno del punto la funzione manifesti particolari oscillazioni.

Esercizio 3

$$\lim_{x \to 2^+} (x-1)^2$$

Per calcolare il limite consideriamo che la funzione è un polinomio e quindi è continua: possiamo operare per semplice sostituzione, ma al posto di 2^+ scriviamo 2,01.

$$\lim_{x \to 2^+} (x-1)^2 = (2{,}01-1)^2 = (1{,}01)^2 = 1{,}001 = 1^+ \tag{3.4}$$

Esercizio 4

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (\pi - 2x)$$

Per calcolare il limite consideriamo che la funzione è un polinomio (per quanto compaia un pi greco) e quindi è continua: possiamo operare per semplice sostituzione, ma al posto di $-\frac{\pi}{2}^+$ scriviamo $-1{,}56$ cioè $-\frac{3{,}14}{2} + 0{,}01$.

$$\lim_{x \to -\frac{\pi^+}{2}} (\pi - 2x) = (3{,}14 - 2 \cdot (-1{,}56) = 6{,}26 = 2\pi^- \tag{3.5}$$

Operando con numeri interi, come nel precedente esempio, riusciamo a capire qual è il numero intorno al quale stiamo operando. Con numeri come il pi greco tutto ciò diverta più difficoltoso e meno trasparente: siamo stati costretti a scrivere numericamente anche il pi greco presente nella funzione e nell'ultimo passaggio siamo confortati solo dalla semplicità delle operazioni.

3.3.2 Secondo metodo

Un secondo metodo può essere quello di fare riferimento a delle regole algebriche di base, per le quattro operazioni fondamentali, e che permettono di non fare approssimazioni come nel caso precedente.

$x_0 > 0$	$x_0 \cdot x_1^{\pm} = x_2^{\pm}$
$x_0 < 0$	$x_0 \cdot x_1^{\pm} = x_2^{\mp}$
$x_0 > 0$	$(x_1^{\pm})^n = x_2^{\pm}$
$x_0 < 0$ e n pari	$(x_1^{\pm})^n = x_2^{\mp}$
$x_0 < 0$ e n dispari	$(x_1^{\pm})^n = x_2^{\pm}$
n pari	$(0^{\pm})^n = 0^{+}$
n dispari	$(0^{\pm})^n = 0^{\pm}$

In altre parole: se moltiplichiamo o dividiamo per un numero positivo il punto da destra o da sinistra otterremo ancora un punto da destra o da sinistra; se invece moltiplichiamo o dividiamo per un numero negativo cambia l'essere da destra o da sinistra.

Esercizio 5

$$\lim_{x \to 2^+} (x-1)^2$$

Abbiamo lo stesso esercizio di prima: risolviamo con le regole appena enunciate.Siccome la funzione è continua operiamo per semplice sostituzione. Incontriamo subito una somma tra numeri e quindi rimane l'essere da destra nel risultato.

$$\lim_{x \to 2^+} (x-1)^2 = (2^+ - 1)^2 = (1^+)^2 = 1^+ \tag{3.6}$$

Nell'ultimo passaggio compare una potenza: è come avere la moltiplicazione tra due numeri positivi e quindi rimane anche qui l'essere da destra.

Esercizio 6

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (\pi - 2x)$$

Possiamo operare per semplice sostituzione, ma senza approssimazioni

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (\pi - 2x) = \left(\pi - 2\left(-\frac{\pi^+}{2}\right)\right) = (\pi + \pi^-) = 2\pi^- \tag{3.7}$$

Abbiamo moltiplicato il numero da destra per un numero negativo (−2) e quindi è diventato da sinistra. Lo abbiamo poi sommato con un numero ed è rimasto da sinistra.

Questo metodo non pone necessità di approssimazioni e sarà il metodo che preferiremo negli esercizi successivi.

3.4 Limiti con somme

Esercizio 7

$$\lim_{x\to 3^+} \ln(x-3)-6(x-4)^2$$

La funzione è composta dal logaritmo di un polinomio e da un polinomio: è quindi continua nel suo campo di esistenza. Se sostituiamo il punto a cui tende il limite nel secondo polinomio non ci sono problemi; invece nell'argomento del logaritmo otteniamo zero dove il logaritmo propriamente non è definito, ma conosciamo il suo andamento quando l'argomento tende a zero. Al posto di 3^+ scriviamo 3,01.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^+} \ln(x-3)-6(x-4)^2 = \\ &\lim_{x\to 3^+} \ln(3{,}01-3)-6(3{,}01-4)^2 = \\ &\lim_{x\to 3^+} \ln(0{,}01)-6(-0{,}99)^2 = -\infty-6\cdot 0{,}9801 = -\infty-5{,}8806 = -\infty \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ricordiamo che il logaritmo naturale tende a meno infinito quando l'argomento tende a zero (da destra) e che sommando algebricamente un numero ad un infinito rimane l'infinito.

Oppure

Fatte le stesse considerazioni preliminari di prima operiamo per sostituzione.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^+} \ln(x-3)-6(x-4)^2 = \\ &\lim_{x\to 3^+} \ln(3^+-3)-6(3^+-4)^2 = \\ &\lim_{x\to 3^+} \ln(0^+)-6(-1^+)^2 = -\infty-6\cdot 1^- = -\infty-6^+ = -\infty \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nell'ultimo riga compare una potenza con indice pari di un numero negativo: quindi l'essere da destra diventa da sinistra. Poi abbiamo la moltiplicazione di un numero da sinistra per un numero negativo: otteniamo un numero da destra.

3.5 Limiti con prodotti

Esercizio 8

$$\lim_{x\to+\infty} 5(3^x - 2^{-x} + 4)$$

Abbiamo una funzione che a numeratore è la somma di più esponenziali. Il limite è per x che tende all'infinito e conosciamo il comportamento degli esponenziali. Nel primo passaggio sostituiamo l'infinito al posto della x anche se propriamente è un'operazione non accettabile, ma ci serve che vedere meglio a cosa tendono le nostre funzioni.

$$\lim_{x\to+\infty} 5(3^x - 2^{-x} + 4) = 5(3^{+\infty} - 2^{-\infty} + 4) = \\ 5(+\infty - 0 + 4) = 5(+\infty) = +\infty \tag{3.10}$$

Nel terzo passaggio ci ricordiamo che un esponenziale con base maggiore di uno tende a $+\infty$ quando il suo argomento tende a $+\infty$ e tende a zero quando il suo argomento tende a $-\infty$.
Nel passaggio successivo abbiamo sommato numeri finiti ad un infinito e questo ovviamente prevale su tutto. Infine abbiamo moltiplicato l'infinito per un numero positivo ed è rimasto infinito con lo stesso segno.

3.6 Limiti con rapporti

Il vero problema che si incontra più spesso è nei rapporti, in particolare quando a denominatore compare uno zero: in quel caso determinare se il denominatore tende a zero da destra o da sinistra è determinante per conoscere il segno finale del limite.

Esercizio 9

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2+x+1}{x-3}$$

In questo caso abbiamo il rapporto tra due polinomi: operiamo per semplice sostituzione.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2+x+1}{x-3} = \frac{2(3^+)^2+3^++1}{3^+-3} = \frac{2(9^+)+4^+}{0^+} = \frac{22^{(+)}}{0^+} = +\infty \tag{3.11}$$

Per quanto riguarda il numeratore in realtà poco importa che il risultato sia da destra o da sinistra: la cosa fondamentale è che si abbia un numero positivo. Abbiamo comunque conservato l'espressione da destra per una migliore comprensione dell'esercizio, ma nella pratica comune avremmo potuto omettere questi riferimenti. Alla fine abbiamo scritto il "da destra" tra parentesi a sottolineare che a quel punto esso non ha nessuna rilevanza. Diverso il caso del denominatore: è il suo essere da destra che dà il segno finale all'infinito.

Esercizio 10

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\ln(6-x)}{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Abbiamo il rapporto tra due funzioni continue nel loro campo di esistenza e di cui conosciamo l'andamento agli estremi del loro campo di esistenza. Procediamo innanzi tutto per sostituzione.

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\ln(6-x)}{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\ln(6-\pi^-)}{\tan\left(\pi^- - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\ln(6-\pi)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} = \frac{\ln(6-\pi)}{+\infty} = 0 \tag{3.12}$$

Ci accorgiamo che il numeratore ci da una grandezza finita: $6-\pi$ è sicuramente maggiore di zero e quindi il logaritmo si può calcolare. Il denominatore ci dà la tangente di pi greco mezzi, che non esiste, ma di cui conosciamo l'andamento nel suo intorno sinistro, ricordando il grafico mostrato anche in questi appunti.

Arriviamo all'ultimo passaggio con una grandezza finita al numeratore e un infinito a denominatore: il risultato, a prescindere dai segni, non può che essere zero.

Parte II

Applicazioni dei limiti

4 Discontinuità e singolarità

Chiamiamo *punto di discontinuità* per una funzione un punto x_0 appartenente al dominio della funzione in cui la funzione non è continua.

Un punto di accumulazione x_0 per il dominio di una funzione è detto di *singolarità*:

1. *Singolarità di prima specie.*
   Quando esistono finiti i limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ma sono diversi tra loro.
2. *Singolarità di seconda specie.*
   Quando almeno uno dei limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ o è infinito o non esiste.
3. *Singolarità di terza specie o eliminabile.* Quando esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (ovvero il limite destro e sinistro in x_0 sono uguali), ma $l \neq f(x_0)$ o la funzione in quel punto non esiste.

Un punto di singolarità può appartenere al dominio di una funzione invece un punto di discontinuità lo è sempre.

Come cercare i punti di singolarità o discontinuità

Cerchiamo questi punti agli estremi finiti del campo di esistenza della funzione in punti che siano di accumulazione oppure, se la funzione è definita per casi, nei punti di passaggio tra un caso e l'altro.

5 Asintoti

Un *asintoto* è una retta la cui distanza dal grafico della funzione tende a zero quando l'ascissa o l'ordinata del grafico della funzione tendono all'infinito.

Distinguiamo tre tipologie di asintoti.

- *Asintoto orizzontale*: è una retta parallela all'asse x.

  Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ allora esiste un asintoto orizzontale di equazione $y = l$,

  Il grafico della funzione tende ad essa unicamente all'infinito.
  L'eventuale asintoto che si trova a $+\infty$ è distinto da quello che si può trovare per $-\infty$.

- *Asintoto verticale*: è una retta parallela all'asse y.

  Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ allora esiste un asintoto verticale di equazione $x = x_0$,

  Il limite può esistere anche solo da destra o da sinistra: in quel caso parliamo di asintoto destro o sinistro.
  La presenza dell'asintoto verticale è associata alle singolarità di seconda specie.

- *Asintoto obliquo*: è una retta non parallela agli assi cartesiani.

  Si può dimostra che l'asintoto ha equazione $y = mx + q$ dove:

  $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$

  Il grafico della funzione tende all'asintoto unicamente all'infinito.
  L'eventuale asintoto che si trova a $+\infty$ è distinto da quello che si può trovare per $-\infty$.

  Cerchiamo l'asintoto obliquo solo se non troviamo quello orizzontale.

Come cercare gli asintoti

- Cerchiamo gli asintoti *orizzontali* all'infinito. Se non gli troviamo possiamo cercare, sempre all'infinito, gli asintoti *obliqui*.
- Cerchiamo gli asintoti *verticali* nei punti di singolarità, ovvero in punti (finiti) agli estremi del campo di esistenza.

Indice analitico

continuità da destra, 7
continuità da sinistra, 7

punti isolati, 7
punto di discontinuità, 19
punto di singolarità, 19