Integrali

esercizi svolti e ordinati per competenze
e temi d'esame

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione **1**
- 1.1 Licenza e Copyright . . . 1
- 1.2 Ringraziamenti . . . 2

I Integrali indefiniti **3**

2 Integrali elementari **5**
- 2.1 Integrale indefinito . . . 5
- 2.2 Regole fondamentali di integrazione . . . 5
- 2.3 Integrali elementari o per scomposizione . . . 6

3 Integrali di funzioni composte **9**

4 Integrali per parti **11**
- 4.1 Integrale in più passaggi . . . 12
- 4.2 Uno dei fattori è uno . . . 13
- 4.3 Integrale ciclico . . . 14

5 Integrali per sostituzione **15**

6 Integrali di funzioni razionali fratte **17**
- 6.1 Il numeratore è la derivata del denominatore . . . 18
- 6.2 Il denominatore è di primo grado . . . 19
- 6.3 Il denominatore è di secondo grado . . . 20

II Integrali definiti e applicazioni **29**

7 Integrali definiti **31**
- 7.1 La funzione integrale . . . 31
- 7.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 32
- 7.3 Teorema del valor medio . . . 35
- 7.4 Integrali impropri . . . 35

8 Aree **37**
- 8.1 Area tra una curva e l'asse x . . . 38
- 8.2 Area tra due curve . . . 41

9 Volumi **43**

III Temi d'esame **45**

10 Temi d'esame **47**

1 Introduzione

Caro lettore,

questi appunti sono relativi agli integrali, quali si studiano attualmente al liceo scientifico, con particolare riferimento ai quesiti dell'esame di maturità; sono pensati come sintesi per un ripasso, facendo riferimento a tutte le competenze necessarie per svolgere soprattutto i quesiti. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Queste dispense sono ancora in una fase di lavori in corso, ma ho preferito renderle pubbliche ugualmente.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso.
Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Parte I

Integrali indefiniti

2 Integrali elementari

2.1 Integrale indefinito

Chiamiamo **integrale indefinito** di una funzione $f(x)$ l'insieme di tutte le sue primitive, ovvero di tutte le funzioni $F(x)$ tali che:

$$F'(x) = f(x) \tag{2.1}$$

L'integrale indefinito di una funzione può essere rappresentato dalla somma di una qualsiasi delle sue primitive più una opportuna costante.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \tag{2.2}$$

2.2 Regole fondamentali di integrazione

Regole fondamentali
$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Integrali elementari		
$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ (\alpha \in \Re - \{-1\})$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + c$
$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$
$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$	

Al contrario delle derivate le regole fondamentali sono essenzialmente solo le prime due qui riportate: non esistono regole generali per scomporre prodotti, rapporti e potenze.

2.3 Integrali elementari o per scomposizione

Esercizio 1 *Calcola i seguenti integrali:* $\int x^3\,dx \quad ; \quad \int x^{-1}\,dx$

Sono due integrali diretti.

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c \tag{2.3}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \tag{2.4}$$

Esercizio 2 *Calcola i seguenti integrali:* $\int \frac{x^4}{3}\,dx \quad ; \quad \int [\sin x - 2\cos x]\,dx$

Se un integrale ha la forma di una costante per un integrale elementare possiamo fare uscire la costante dall'integrazione:

$$\int \frac{x^4}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int x^4\,dx = \frac{1}{3}\frac{x^5}{5} + c = \frac{x^5}{15} + c \tag{2.5}$$

Se invece abbiamo l'integrale della somma di funzioni elementari possiamo trasformarla nella somma di integrali.

$$\int [\sin x - 2\cos x]\,dx = \int \sin x\,dx - \int 2\cos x\,dx = \int \sin x\,dx - 2\int \cos x\,dx = -\cos x - 2\sin x + c \tag{2.6}$$

Per un unico integrale si scrive sempre un'unica constante di integrazione.

Esercizio 3 *Calcola i seguenti integrali:* $\int \frac{\sqrt{x}}{3}\,dx \quad ; \quad \int \frac{x^2-4x}{x^3}\,dx$

Come è visibile nella tabella non esiste una regola specifica per gli integrali di radici: dobbiamo esprimerla come potenza e ricondurci all'integrale di potenza.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c \tag{2.7}$$

Il secondo caso sembra totalmente diverso da quelli più elementari, ma notiamo che la frazione ha un unico denominatore: possiamo quindi dividere i singoli addendi del numeratore per il denominatore.

$$\int \frac{x^2-4x}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2}{x^3}\,dx - \int \frac{4x}{x^3}\,dx = \int x^{-1}\,dx - 4\int x^{-2}\,dx \tag{2.8}$$

Abbiamo eliminato il denominatore ottenendo degli integrali elementari.

$$\int x^{-1}\,dx - 4\int x^{-2}\,dx = \ln|x| - 4\frac{x^{-1}}{-1} + c = \ln|x| + \frac{4}{x} + c \tag{2.9}$$

Esame 1 *Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$, sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.*

La funzione incognita $f(x)$ è una primitiva della derivata riportata. Per cui:

$$f(x) = \int (-2x^2 + 6)\,\mathrm{d}x = -2 \cdot \frac{x^3}{3} + 6x + c \tag{2.10}$$

Rimane da determinare la costante di integrazione.

Il coefficiente angolare della retta tangente deve essere un valore assunto dalla derivata della funzione in qualche punto.

$$-2 = -2x^2 + 6 \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 6 &= -2 \\ -2x^2 &= -8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il testo dice che la retta è tangente al grafico nel secondo quadrante quindi la x cercata è $x = -2$. Si presti attenzione al fatto che è solo un caso che il coefficiente angolare e il valore della x coincidano.

Ora imponiamo che la funzione incognita e la tangente passino per lo stesso punto di ascissa $x = -2$ e quindi abbiano la stessa ordinata.

$$\begin{aligned} f(-2) = -\frac{2}{3}(-2)^3 + 6(-2) + c &= -2(-2) + 5 \\ \frac{16}{3} - 12 + c &= 4 + 5 \\ c &= 4 + 5 + 12 - \frac{16}{3} = 21 - \frac{16}{3} = \frac{63 - 16}{3} \\ c &= \frac{47}{3} \end{aligned} \tag{2.13}$$

La funzione incognita è quindi

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3} \tag{2.14}$$

aggiungo e tolgo un numero

3 Integrali di funzioni composte

Al contrario delle derivate con gli integrali procediamo anche per tentativi ovvero proviamo ad interpretare l'integrale secondo uno certo schema e con uno o due passaggi verifichiamo se lo schema si adatta al nostro caso. Partiamo dagli schemi più semplici e se non funzionano utilizziamo schemi o metodi risolutivi più complessi.

Integrali di funzioni composte	
$\int f'(x) \cdot f(x)^{\alpha}\, \mathrm{d}x = \dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; (\alpha \in \Re - \{-1\})$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\, \mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)}\, \mathrm{d}x = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int f'(x) \cdot \sin f(x)\, \mathrm{d}x = -\cos f(x) + c$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\, \mathrm{d}x = \sin f(x) + c$
$\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, \mathrm{d}x = \tan f(x) + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\, \mathrm{d}x = -\cot f(x) + c$
$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\, \mathrm{d}x = \arcsin f(x) + c$	$\int \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\, \mathrm{d}x = \arccos f(x) + c$
$\int \dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\, \mathrm{d}x = \arctan f(x) + c$	

moltiplico e divido per una costante

4 Integrali per parti

Partendo dalla formula per la derivazione di un prodotto è possibile esprimere la seguente relazione:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

La relazione precedente è detta *integrale per parti*: la sua applicazione consente di trasformare l'integrale a primo membro nell'integrale a secondo membro con l'obiettivo che quest'ultimo sia di più semplice risoluzione.

Nel prodotto $f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ il fattore $f(x)$ è detto *fattore finito*, mentre $g'(x)\,\mathrm{d}x$ è detto *fattore differenziale*. L'abilità nell'uso del metodo consiste anche nel capire quale delle due funzioni del primo integrale debba essere come considerata l'uno o l'altro fattore.

Possiamo scrivere la relazione fondamentale anche come:

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right) - \int f'(x)\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

per esprimere meglio il fatto che delle due funzioni presenti nel primo integrale una deve essere a sua volta integrata.

$\int x^n \sin x\,\mathrm{d}x$	$\int x^n \cos x\,\mathrm{d}x$	$\int x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$	x^n è il fattore finito
$\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$	$\int x^n \arcsin x\,\mathrm{d}x$	$\int x^n \arccos x\,\mathrm{d}x$	$x^n\,\mathrm{d}x$ è il fattore differenziale

Esercizio 4 *Calcola il seguente integrale:* $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Secondo lo schema prima indicato consideriamo x come fattore finito.

$$\begin{aligned}\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x\left(\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) - \int D(x)\left(\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x = \\ &= x\mathrm{e}^x - \int 1\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1 Integrale in più passaggi

Esercizio 5 *Calcola il seguente integrale:* $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$.

A volte è necessario applicare più volte la formula risolutiva: è il caso di una potenza intera di x per un'altra funzione, dove ad ogni passaggio riusciamo ad abbassare il grado della x di una unità, e comunque riusciamo di volta in volta ad ottenere un nuovo integrale più semplice del precedente. Consideriamo come fattore finito x^2.

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) \, \mathrm{d}x \tag{4.4}$$

Integriamo per parti l'ultimo integrale ottenuto.

$$\int 2x \cos x \, \mathrm{d}x = 2x \sin x - \int 2 \sin x \, \mathrm{d}x = 2x \sin x - 2(-\cos x) + c \tag{4.5}$$

Infine, tornando all'espressione di partenza possiamo scrivere:

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \tag{4.6}$$

Esame 2 *Data la funzione* $f(x)$ *definita in* $\Re$, $f(x) = \mathrm{e}^x(2x + x^2)$, *individuare la primitiva di* $f(x)$ *il cui grafico passa per il punto* $(1, 2\mathrm{e})$.

Le primitive della funzione data sono date dal suo integrale indefinito.

$$F(x) = \int \mathrm{e}^x(2x + x^2) \, \mathrm{d}x = \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x + \int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \tag{4.7}$$

Entrambi questi integrali sono del tipo illustrato anche nella tabella precedente e vanno svolti per parti. Sviluppiamo in particolare il secondo integrale.

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^2 \mathrm{e}^x - \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \tag{4.8}$$

Abbiamo ritrovato il primo integrale, per cui tornando indietro possiamo scrivere:

$$F(x) = \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x + \int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{e}^x - \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^2 \mathrm{e}^x + c \tag{4.9}$$

Adesso, per trovare la constante di integrazione associata alla desiderata primitiva, imponiamo che la primitiva passi per il punto dato.

$$F(1) = 1^2 \mathrm{e}^1 + c = 2\mathrm{e} \quad ; \quad c = 2\mathrm{e} - \mathrm{e} = \mathrm{e} \tag{4.10}$$

La primitiva cercata è:

$$F(x) = x^2 \mathrm{e}^x + \mathrm{e} \tag{4.11}$$

4.2 Uno dei fattori è uno

Esercizio 6 *Calcola il seguente integrale:* $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

Come indicato nel titolo a volte conviene considerare come fattore differenziale l'uno che sempre possiamo pensare moltiplichi la funzione integranda.

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x \, \mathrm{d}x = \arcsin x \left(\int 1 \, \mathrm{d}x \right) - \int D(\arcsin x) \left(\int 1 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x = \\ = \arcsin x \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \, \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.12}$$

L'ultimo integrale comparso è della forma $\int [f(x)^\alpha] f'(x) \, \mathrm{d}x$ dove $f(x) = 1 - x^2$ e $f'(x) = -2x$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int x[1-x^2]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{-2} \int -2x[1-x^2]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \frac{[1-x^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x^2} + c \tag{4.13}$$

Infine:

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = \arcsin x \cdot x - \sqrt{1-x^2} + c \tag{4.14}$$

4.3 Integrale ciclico

Esercizio 7 *Calcola il seguente integrale:* $\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Ci sono dei casi in cui, nell'applicazione della formula per l'integrazione per parti, sembra che non si sia fatto nessun passo in avanti dal momento che l'integrale di partenza ricompare, tale e quale, nei passaggi successivi: è il caso di questo integrale. Scegliere come fattore finito il seno o il coseno è indifferente: scegliamo il seno.

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \sin x \, \mathrm{d}x \tag{4.15}$$

A secondo membro è ricomparso l'integrale di partenza, solo con i termini invertiti.
Allora portiamo anche il secondo integrale a primo membro.

$$\begin{aligned} 2 \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x &= \sin x \cdot \sin x \\ \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x &= \frac{\sin^2 x}{2} + c \end{aligned} \tag{4.16}$$

L'integrale è stato risolto.

Se avessimo scelto come fattore finito il coseno avremmo ottenuto come risultato $-\frac{\cos^2 x}{2}$ che, ricordando la prima relazione fondamentale della goniometria, è lo stesso risultato.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \tag{4.17}$$

Il fattore uno può tranquillamente essere considerato come inglobato nella costante c.

5 Integrali per sostituzione

L'idea alla base dell'integrazione per sostituzione è quella di cambiare variabile all'integrale nella prospettiva che il nuovo integrale sia più facilmente risolubile.

Di solito si esprime questo cambiamento di variabile nei seguenti termini:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[g(t)]g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

dove $x = g(t)$ e $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.

É importante osservare che il metodo non consiste nel cercare direttamente la funzione $g(t)$, ma una funzione invertibile $t = g^{-1}(x)$ che consenta di *sostituire* una parte dell'espressione della funzione $f(x)$ con questo nuovo parametro t. In pratica:

- Cerchiamo una funzione invertibile $t = g^{-1}(x)$ da sostituire ad una parte dell'espressione della funzione $f(x)$.
- Troviamo la funzione $x = g(t)$ e il suo differenziale $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ e sostituiamo queste espressioni nell'integrale in x.
- Risolviamo l'integrale in t ottenendo una funzione di t.
- Risostituiamo la funzione $t = g^{-1}(x)$ in modo da ottenere l'integrale cercato in x.

Non sappiamo indicare un metodo sempre efficace per scegliere quando e cosa sostituire nella funzione da integrare: solitamente si presta bene sostituire espressioni con radici o funzioni trascendenti presenti all'interno della $f(x)$.

Esercizio 8 *Calcola il seguente integrale:* $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Proviamo a sostituire con la variabile t l'espressione $\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x} \\ x &= t^2 \\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sostituiamo nell'integrale.

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2-t}2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t-1}\,\mathrm{d}t \tag{5.3}$$

Abbiamo un integrale della forma $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{2}{t-1}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t-1| + c \tag{5.4}$$

A questo punto risostituiamo la variabile t con la x.

$$y(x) = 2\ln|\sqrt{x}-1| + c \tag{5.5}$$

Esercizio 9 *Calcola il seguente integrale:* $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

L'integrale precedente non è né un integrale elementare né di una funzione composta e né può essere svolto per parti, a meno di non farlo diventare ancora più complicato. Proviamo con la sostituzione $t = \tan x$.

$$\begin{aligned} t &= \tan x \\ x &= \arctan t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.6}$$

Sostituiamo nell'integrale.

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int t^2 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{5.7}$$

É un integrale di funzione razionale fratta in cui il numeratore ha un grado maggiore o uguale al denominatore. Dobbiamo dividere il numeratore per il denominatore per abbassarne il grado.

$$\begin{array}{ll|l} t^2 & & t^2+1 \\ \cline{3-3} -t^2 & -1 & 1 \\ \cline{1-2} & -1 & \end{array}$$

$$\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = t - \arctan t + c \tag{5.8}$$

A questo punto risostituiamo la variabile t con la x.

$$y(x) = \tan x - x + c \tag{5.9}$$

6 Integrali di funzioni razionali fratte

Tutti i metodi di integrazione che seguono presuppongono che:

> Quando integriamo una funzione razionale fratta il grado del numeratore *deve essere inferiore* al grado del denominatore. Altrimenti facciamo la divisione tra numeratore e divisore.

Se la nostra funzione integranda non si presenta nella forma sopra indicata si può sempre abbassare il grado del numeratore dividendolo per il denominatore. Infatti possiamo in tali casi possiamo sempre scrivere:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \tag{6.1}$$

dove $N(x)$ è il polinomio a numeratore, $D(x)$ il polinomio a denominatore, $Q(x)$ il quoziente della divisione e $R(x)$ il resto.

Compiendo questa divisione ci troveremo ad integrare il polinomio $Q(x)$ e la frazione algebrica $R(x)/D(x)$ che ha il numeratore di grado inferiore al denominatore, come richiesto.

Quando integriamo una funzione che è una frazione algebrica, dopo aver compiuto eventualmente la divisione precedente, ci chiediamo se il numeratore è la derivata del denominatore.

6.1 Il numeratore è la derivata del denominatore

Se il numeratore è la derivata del denominatore l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{6.2}$$

Esercizio 10 *Calcola il seguente integrale:* $\int \frac{30x^4 - 28x}{3x^5 - 7x^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$

In questo caso il numeratore è di grado inferiore al denominatore. Passiamo allora a controllare se la derivata del denominatore è uguale al numeratore.

$$D[3x^5 - 7x^2 + 1] = 15x^4 - 14x \tag{6.3}$$

Il numeratore non è la derivata del denominatore, ma è quasi evidente che siano direttamente proporzionali, infatti:

$$30x^4 - 28x = 2 \cdot (15x^4 - 14x) \tag{6.4}$$

Il fattore 2 può essere facilmente portato fuori dall'integrale e quindi possiamo scrivere:

$$\int \frac{30x^4 - 28x}{3x^5 - 7x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{15x^4 - 14x}{3x^5 - 7x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|3x^5 - 7x^2 + 1| + c \tag{6.5}$$

6.2 Il denominatore è di primo grado

Quando il denominatore è di primo grado allora il numeratore non può che essere di grado zero e l'integrale si può sempre ricondurre al caso precedente.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{6.6}$$

Esercizio 11 *Calcola il seguente integrale:* $\int \frac{-10x^2+24x+20}{5x+3}\,\mathrm{d}x$.

In questo caso il numeratore è di grado superiore al denominatore: cominciamo abbassandone il grado con la divisione tra il numeratore e il denominatore.

$$\begin{array}{rrr|l}
-10x^2 & +24x & +20 & 5x+3 \\ \cline{4-4}
+10x^2 & +6x & & -2x+6 \\ \cline{1-3}
 & 30x & +20 & \\
 & -30x & -18 & \\ \cline{2-3}
 & & 2 &
\end{array}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{-10x^2+24x+20}{5x+3}\,\mathrm{d}x = \int (-2x+6)\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{5x+3}\,\mathrm{d}x \tag{6.7}$$

Il primo integrale è immediato:

$$\int (-2x+6)\,\mathrm{d}x = -2\cdot\frac{x^2}{2} + 6x + c = -x^2 + 6x + c \tag{6.8}$$

Osserviamo il secondo integrale: il numeratore è la derivata del denominatore?

$$D[5x+3] = 5 \tag{6.9}$$

No, ma possiamo facilmente far compare l'opportuna costante moltiplicando e dividendo per 5.

$$\int \frac{2}{5x+3}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\ln|5x+3| + c \tag{6.10}$$

Infine il risultato finale è:

$$\int \frac{-10x^2+24x+20}{5x+3}\,\mathrm{d}x = -x^2 + 6x + \frac{2}{5}\ln|5x+3| + c \tag{6.11}$$

6.3 Il denominatore è di secondo grado

Quando il denominatore è di secondo grado allora distinguiamo tre casi a seconda del Δ associato al polinomio a denominatore.

I caso $\Delta > 0$

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \tag{6.12}$$

1. Si scompone il denominatore in fattori: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
2. Si eguaglia la frazione alla somma di due frazioni che hanno per denominatore i fattori prima trovati e per numeratore due costanti A e B.

$$\frac{px+q}{ax^2+bx^2+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} \tag{6.13}$$

3. Si trovano i valori di A e B che rendono vera l'eguaglianza precedente.
4. Si può riscrivere l'integrale di partenza come la somma di due integrali in cui il denominatore è di primo grado.

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx^2+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{a(x-x_1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{(x-x_2)}\,\mathrm{d}x \tag{6.14}$$

Esercizio 12 *Calcola il seguente integrale:* $\int \frac{3x+1}{2x^2-8x-42}\,\mathrm{d}x$.

In questo caso il numeratore è di grado inferiore al denominatore.

Passiamo allora a controllare se la derivata del denominatore è uguale al numeratore.

$$D[2x^2-8x-42] = 4x-8 \tag{6.15}$$

Il numeratore non è la derivata del denominatore e non è nemmeno ad esso proporzionale.

Scomponiamo in fattori il denominatore, trovando le eventuali radici del trinomio.

$$\begin{gathered} x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 2\cdot(-42)}}{4} = \frac{8 \pm 20}{4} = 2 \pm 5 \\ x_1 = 2+5 = 7 \quad ; \quad x_2 = 2-5 = -3 \end{gathered} \tag{6.16}$$

Il denominatore ha $\Delta > 0$: trasformiamo la funzione integranda nella somma di due frazioni con denominatore di primo grado.

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{2x^2-8x-42} =& \frac{A}{2(x+3)} + \frac{B}{(x-7)} = \\ & \frac{A(x-7)+2(x+3)B}{2(x+3)(x-7)} = \\ & \frac{Ax-7A+2xB+6B}{2(x+3)(x-7)} = \\ & \frac{x(A+2B)-7A+6B}{2(x+3)(x-7)} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Eguagliamo i coefficienti del polinomio a numeratore per trovare i valori di A e B.

$$\begin{cases} A + 2B = 3 \\ -7A + 6B = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} A = 3 - 2B \\ -7(3 - 2B) + 6B = 1 \end{cases} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned} &-21 + 14B + 6B = 2 \\ &22B = 22 \quad ; \quad B = 1 \\ &A = 3 - 2B = 1 \end{aligned} \tag{6.19}$$

L'integrale di partenza diventa:

$$\int \frac{3x+1}{2x^2 - 8x - 42}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(x+3)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-7)}\,\mathrm{d}x \tag{6.20}$$

I nuovi integrali sono della forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, quindi:

$$\int \frac{1}{2(x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x+3| + c \tag{6.21}$$

$$\int \frac{1}{x-7)}\,\mathrm{d}x = \ln|x-7| + c \tag{6.22}$$

Infine:

$$\int \frac{3x+1}{2x^2 - 8x - 42}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x+3| + \ln|x-7| + c \tag{6.23}$$

II caso $\Delta = 0$

Quanto il delta è uguale a zero il denominatore ha due radici coincidenti e si può scomporre così.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 \tag{6.24}$$

Distinguiamo due sotto casi.

- Se *il numeratore è di grado zero* possiamo interpretare l'integrale come del tipo

$$\int f'(x)f(x)^{-2}\,\mathrm{d}x = -f(x)^{-1} + c \tag{6.25}$$

$$\int \frac{q}{a(x - x_0)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{q}{a}\frac{1}{(x - x_0)} + c \tag{6.26}$$

- Se *il numeratore è di primo grado* procediamo come nel caso di $\Delta > 0$

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx^2 + c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{a(x - x_0)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{(x - x_0)^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.27}$$

La seconda o la prima frazione a secondo membro deve essere al quadrato o altrimenti la somma non potrebbe dare un trinomio di secondo grado.

Esercizio 13 *Calcola il seguente integrale:* $\int \frac{7}{4x^2 + 8x + 4}\,\mathrm{d}x$.

In questo caso il numeratore è di grado inferiore al denominatore.

Passiamo allora a controllare se la derivata del denominatore è uguale al numeratore.

$$D[4x^2 + 8x + 4] = 8x + 8 \tag{6.28}$$

Il numeratore non è la derivata del denominatore e non è nemmeno ad esso proporzionale.
Scomponiamo in fattori il denominatore, trovando le eventuali radici del trinomio.

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{4} = -\frac{8}{8} = -1 \tag{6.29}$$

Il denominatore ha $\Delta = 0$ e il numeratore è di grado zero: interpretiamo l'integrale come l'integrale di una funzione di potenza per la sua derivata ($D[x + 1] = 1$).

$$\int \frac{7}{4x^2 + 8x + 4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7}{4(x + 1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{4(x + 1)} + c \tag{6.30}$$

Esercizio 14 *Calcola il seguente integrale:* $\displaystyle\int \frac{6x-3}{4x^2+8x+4}\,\mathrm{d}x$.

In questo caso il numeratore è di grado inferiore al denominatore.

Passiamo allora a controllare se la derivata del denominatore è uguale al numeratore.

$$D[4x^2+8x+4] = 8x+8 \tag{6.31}$$

Il numeratore non è la derivata del denominatore e non è nemmeno ad esso proporzionale.

Scomponiamo in fattori il denominatore, trovando le eventuali radici del trinomio.

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-4\cdot 4\cdot 4}}{4} = -\frac{8}{8} = -1 \tag{6.32}$$

Il denominatore ha $\Delta = 0$ e il numeratore è di primo grado: risolviamo l'integrale col metodo proposto quando $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{6x-3}{4x^2+8x+4} =& \frac{A}{4(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \\ & \frac{A(x+1)+4B}{4(x+1)^2} = \\ & \frac{Ax+A+4B}{4(x+1)^2} \end{aligned} \tag{6.33}$$

Eguagliamo i coefficienti del polinomio a numeratore per trovare i valori di A e B.

$$\begin{cases} A = 6 \\ A+4B = -3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} A = 6 \\ 6+4B = -3 \end{cases} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned} & 4B = -3-6 = -9 \\ & B = -\frac{9}{4} \quad ; \quad A = 6 \end{aligned} \tag{6.35}$$

L'integrale di partenza diventa:

$$\int \frac{6x-3}{4x^2+8x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{4(x+1)}\,\mathrm{d}x + \int -\frac{9}{4(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.36}$$

I nuovi integrali sono della forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ e del tipo dell'esercizio precedente, quindi:

$$\int \frac{6}{4(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln|x+1| + c \tag{6.37}$$

$$\int -\frac{9}{4(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + c \tag{6.38}$$

Infine:

$$\int \frac{6x-3}{4x^2+8x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{9}{4(x+1)} + c \tag{6.39}$$

III caso $\Delta < \mathbb{0}$

Quanto il delta è minore di zero il denominatore è irriducibile e non si può scomporre in fattori.

Distinguiamo due sotto casi.

- Se *il numeratore è di grado zero* possiamo interpretare l'integrale come del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \arctan f(x) + c \tag{6.40}$$

$$\int \frac{f'(x)}{k^2+[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\arctan\frac{f(x)}{k} + c \tag{6.41}$$

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{q}{a[(x+m)^2+k^2]}\,\mathrm{d}x = \frac{q}{a\cdot k}\arctan\frac{x+m}{k} + c \tag{6.42}$$

- Se *il numeratore è di primo grado* facciamo comparire a numeratore la derivata del denominatore: avanzerà poi un termine di grado zero. // Allora possiamo scrivere l'integrale come somma di due integrali.

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx^2+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{D[ax^2+bx^2+c]}{ax^2+bx^2+c}\,\mathrm{d}x + \int \frac{h}{ax^2+bx^2+c}\,\mathrm{d}x \tag{6.43}$$

  Il primo integrale è del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ e il secondo del tipo descritto appena qui sopra.

Con la tipologia di integrali di questo paragrafo il risultato finale non ha sempre un aspetto rassicurante: se abbiamo dei numeri messi a caso nei polinomi allora nel risultato compariranno anche radici e antipatiche frazioni.

Esercizio 15 *Calcola il seguente integrale:* $\int \frac{4}{3x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$

In questo caso il numeratore è di grado inferiore al denominatore.
Passiamo allora a controllare se la derivata del denominatore è uguale al numeratore.

$$D[3x^2+5x+7] = 6x+5 \tag{6.44}$$

Il numeratore non è la derivata del denominatore e non è nemmeno ad esso proporzionale.
Scomponiamo in fattori il denominatore, trovando le eventuali radici del trinomio.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 3\cdot 7}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{-59}}{4} \tag{6.45}$$

Il denominatore ha $\Delta < 0$: dobbiamo riscriverlo come la somma del quadrato di un binomio più un numero, con la tecnica del completamento del quadrato. Cominciamo col mettere in evidenza il coefficiente del termine di secondo grado.

$$\int \frac{4}{3x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{3\left(x^2+\frac{5x}{3}+\frac{7}{3}\right)}\,\mathrm{d}x \tag{6.46}$$

In questo caso $5x/3$ è il doppio prodotto del primo per il secondo: da questo fatto determiniamo il secondo.

$$\frac{5x}{3} = 2 \cdot I \cdot II = 2 \cdot x \cdot II \quad ; \quad II = \frac{5}{6} \tag{6.47}$$

Il quadrato da completare è:

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{25}{36} \tag{6.48}$$

Adesso riscriviamo il trinomio a denominatore della funzione integranda.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{7}{3} &= x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{7}{3} = \\ &= \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{7}{3} = \\ &= \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{-25 + 84}{36} = \\ &= \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{36} \end{aligned} \tag{6.49}$$

Infine possiamo scrivere l'integrale di partenza secondo la formula 6.42.

$$\int \frac{4}{3x^2 + 5x + 7}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{36}\right]}\,\mathrm{d}x \tag{6.50}$$

In questo caso $k^2 = \frac{59}{36}$ e $k = \sqrt{\frac{59}{36}}$ per cui:

$$\frac{q}{a \cdot k} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{\frac{59}{36}}} = \frac{4}{3 \cdot \frac{\sqrt{59}}{6}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{59}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{59}} \tag{6.51}$$

Inoltre:

$$\frac{x + m}{k} = \frac{x + \frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{59}{36}}} = \frac{\frac{6x + 5}{6}}{\frac{\sqrt{59}}{6}} = \frac{6x + 5}{\sqrt{59}} \tag{6.52}$$

Infine l'integrale vale:

$$\int \frac{4}{3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{36}\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{\sqrt{59}} \arctan\left(\frac{6x + 5}{\sqrt{59}}\right) + c \tag{6.53}$$

Esercizio 16 *Calcola il seguente integrale:* $\displaystyle\int \frac{2x+7}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x.$

In questo caso il numeratore è di grado inferiore al denominatore.

Passiamo allora a controllare se la derivata del denominatore è uguale al numeratore.

$$D[5x^2-3x+6] = 10x-3 \tag{6.54}$$

Il numeratore non è la derivata del denominatore e non è nemmeno ad esso proporzionale.

Scomponiamo in fattori il denominatore, trovando le eventuali radici del trinomio.

$$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot5\cdot6}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{-111}}{20} \tag{6.55}$$

Il denominatore ha $\Delta < 0$ e l'integrando ha numeratore di primo grado: innanzi tutto facciamo comparire la derivata del denominatore a numeratore cercando di aggiustare per prima cosa il coefficiente della x.

$$\int \frac{2x+7}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{10x+35}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x \tag{6.56}$$

Poi aggiungiamo e sottraiamo un -3 per il termine di grado zero.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\int \frac{10x+35}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int \frac{10x-3+3+35}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{10x-3}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{38}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.57}$$

Il primo integrale vale:

$$\frac{1}{5}\int \frac{10x-3}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x = \ln|5x^2-3x+6| + c \tag{6.58}$$

Per il secondo procediamo come nell'esercizio precedente: dobbiamo riscrivere il denominatore come la somma del quadrato di un binomio più un numero, con la tecnica del completamento del quadrato. Cominciamo col mettere in evidenza il coefficiente del termine di secondo grado.

$$\frac{1}{5}\int \frac{38}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{38}{5\left(x^2-\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}\right)}\,\mathrm{d}x \tag{6.59}$$

In questo caso $-3x/5$ è il doppio prodotto del primo per il secondo: da questo fatto determiniamo il secondo.

$$-\frac{3x}{5} = 2\cdot I\cdot II = 2\cdot x\cdot II \quad ; \quad II = -\frac{3}{10} \tag{6.60}$$

Il quadrato da completare è:

$$\left(x-\frac{3}{10}\right)^2 = x^2-\frac{3x}{5}+\frac{9}{100} \tag{6.61}$$

Adesso riscriviamo il trinomio a denominatore della funzione integranda.

$$\begin{aligned}x^2-\frac{3x}{5}+\frac{6}{5} &= x^2-\frac{3x}{5}+\frac{9}{100}-\frac{9}{100}+\frac{6}{5} = \\ &= \left(x-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}+\frac{6}{5} = \\ &= \left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{-9+120}{100} = \\ &= \left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{111}{100}\end{aligned} \tag{6.62}$$

Infine possiamo scrivere l'integrale di partenza secondo la formula 6.42.

$$\frac{1}{5}\int \frac{38}{5\left(x^2 - \frac{3x}{5} + \frac{6}{5}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{38}{5\left[\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{111}{100}\right]}\,\mathrm{d}x \tag{6.63}$$

In questo caso $k^2 = \frac{111}{100}$ e $k = \sqrt{\frac{111}{100}}$ per cui:

$$\frac{q}{a \cdot k} = \frac{38}{5 \cdot \sqrt{\dfrac{111}{100}}} = \frac{38}{5 \cdot \dfrac{\sqrt{111}}{10}} = \frac{38}{\dfrac{\sqrt{111}}{2}} = \frac{76}{\sqrt{111}} \tag{6.64}$$

Inoltre:

$$\frac{x+m}{k} = \frac{x - \dfrac{3}{10}}{\sqrt{\dfrac{111}{100}}} = \frac{\dfrac{10x-3}{10}}{\dfrac{\sqrt{111}}{10}} = \frac{10x-3}{\sqrt{111}} \tag{6.65}$$

Infine il secondo integrale vale:

$$\frac{1}{5}\int \frac{38}{5\left[\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{111}{100}\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\frac{76}{\sqrt{111}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{111}}\right) + c \tag{6.66}$$

Concludendo l'integrale dell'esercizio è:

$$\int \frac{2x+7}{5x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x = \ln|5x^2 - 3x + 6| + \frac{76}{5\sqrt{111}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{111}}\right) + c \tag{6.67}$$

Parte II

Integrali definiti e applicazioni

7 Integrali definiti

Una definizione rigorosa di integrale definito, quale quella data da Riemann o Lebesgue, va completamente al di là di questi appunti e di ciò che normalmente si fa a scuola.

Qui ci limitiamo a ricordare che *l'integrale definito* di una funzione continua $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ all'interno del campo di definizione della funzione, *rappresenta l'area del trapezoide* individuato dalla funzione in quell'intervallo, ovvero l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse x, sempre nell'intervallo dato.

Tale integrale è indicato con:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

Regole fondamentali	
$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	
$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	
$\left\lvert\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\rvert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$	

7.1 La funzione integrale

Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ chiamiamo **funzione integrale** di f la funzione $F : [a, b] -> \Re$ definita come:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

7.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

1. *Primo teorema fondamentale del calcolo integrale*
   La funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è una primitiva della funzione $f(x)$.
   $$F'(x) = f(x)$$
2. *Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale*
   Inoltre l'integrale definito è uguale alla differenza tra una primitiva calcola agli estremi d'integrazione.
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Inoltre: se la funzione integrale non ha come estremo di integrazione una semplice variabile come la x, ma piuttosto una funzione $\mathrm{g}(x)$ allora la sua derivata è da considerarsi derivata di funzione composta.

$$F(x) = \int_a^{\mathrm{g}(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(\mathrm{g}(x))\mathrm{g}'(x)$$

Esame 3 *Data la funzione integrale $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.*

La funzione integrale e la retta si incontrano in un punto che può essere determinato ponendo a sistema le due relazioni. Prima di procedere dobbiamo esplicitare la funzione integrale. Determiniamo innanzi tutto la primitiva generica dell'integrale.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x \tag{7.2}$$

Questo integrale è classicamente risolto con una integrazione per parti, prendendo come fattore finito il logaritmo.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c \tag{7.3}$$

Applichiamo il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale per determinare la funzione integrale.

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln x - t]_1^x = (x\ln x - x) - (1\ln 1 - 1) = x\ln x - x + 1 \tag{7.4}$$

Poniamo a sistema l'equazione della retta con la funzione integrale, eguagliandole.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x\ln x - x + 1 \\ 3x &= x\ln x \\ 3 &= \ln x \\ x &= \mathrm{e}^3 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Nel secondo passaggio la x non poteva essere uguale a zero a causa del logaritmo.

Esame 4 *Se* $f(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{1+\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ *per* $x \geq 1$, *qual è il valore di* $f'(2)$ *?*

La derivata della funzione integrale è in questo caso una derivata di funzione composta, secondo quando indicato nel teorema fondamentale del calcolo integrale.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\ln(x^3)} \cdot 3x^2 \tag{7.6}$$

Infine:

$$f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{1+\ln(2^3)} = \frac{12}{1+\ln(8)} \tag{7.7}$$

Esame 5 *Sia* f *la funzione così definita nell'intervallo* $]1, +\infty)$*:*

$$f(x) = \int_{\mathrm{e}}^{x^2} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f *nel suo punto di ascissa* $\sqrt{\mathrm{e}}$.

L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ in un suo punto di coordinate $P(x_0; y_0)$ ha la forma:

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{7.8}$$

Il punto $x_0 = \sqrt{\mathrm{e}}$. Le coordinate di y_0 le troviamo sostituendo x_0 nella funzione (integrale).

$$y_0 = f(x_0) = \int_{\mathrm{e}}^{(\sqrt{\mathrm{e}})^2} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{7.9}$$

L'integrale vale zero perché gli estremi di integrazione risultano uguali.
La derivata della funzione (composta come nell'esercizio precedente) è:

$$f'(x) = \frac{x^2}{\ln x^2} \cdot 2x = \frac{2x \cdot x^2}{\ln x^2} \tag{7.10}$$

Calcolandola in x_0:

$$f'(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{2\sqrt{\mathrm{e}} \cdot (\sqrt{\mathrm{e}})^2}{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})^2} = \frac{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{\ln(\mathrm{e})} = 2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} \tag{7.11}$$

Infine la retta è:

$$y = 2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}(x - \sqrt{\mathrm{e}}) \tag{7.12}$$

Esame 6 *Data la funzione integrale:*

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

7.3 Teorema del valor medio

Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ esiste almeno un numero $c \in [a, b]$ tale che $f(c)$ è uguale al valor medio della funzione in $[a, b]$, ovvero

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Esame 7 *Calcolare il valor medio della funzione*

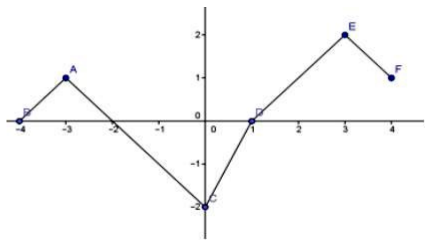
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3}+1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell'intervallo $[1; 6]$ *e determinare il valore della* x *in cui la funzione assume il valor medio.*

Esame 8

La funzione $f(x)$ *è continua per* $x \in [-4; 4]$ *il suo grafico è la spezzata passante per i punti:* $(-4; 0)$, $(-3; 1)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$, $(4; 1)$.

Qual è il valor medio di $f(x)$ *per* $x \in [-4; 4]$*?*

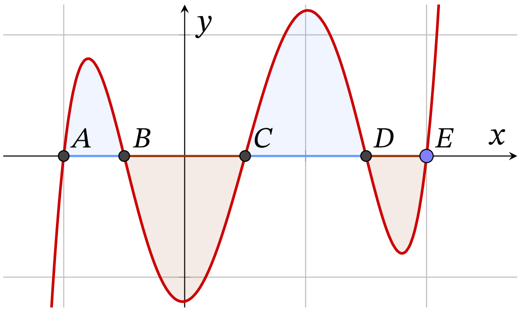


7.4 Integrali impropri

Esame 9 *Risolvere l'integrale improprio:* $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

8 Aree

L'integrale definito, tra gli estremi a e b, di una funzione $f(x)$ ha il significato geometrico di area compresa tra il grafico della funzione e l'asse x, quando la funzione è positiva nell'intervallo considerato.



Se, come nell'esempio posto qui sopra, prendiamo:

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

stiamo considerando l'area del trapezoide compresa tra i punti A e B ed evidenziata in celeste e otteniamo un numero positivo.

Se invece prendiamo

$$\int_B^C f(x)\,\mathrm{d}x < 0$$

otteniamo l'area del trapezoide compresa tra i punti B e C ed evidenziata in rosso, ma cambiata di segno, perché in quella regione la funzione è negativa e l'integrale ci darà un numero negativo.

Se infine prendiamo

$$\int_B^E f(x)\,\mathrm{d}x$$

otteniamo un valore che rappresenta la somma algebrica delle aree in cui la funzione è positiva (nella figura tra il punto C e D) meno le aree in cui la funzione è negativa.

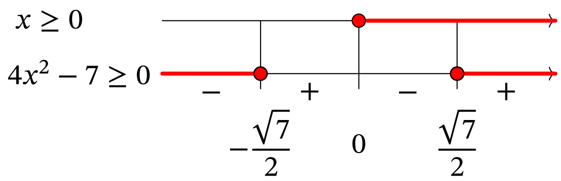
8.1 Area tra una curva e l'asse x

Esercizio 17 *Trova l'area individuata dalla curva descritta dalla funzione $f(x) = 4x^3 - 7x$, l'asse x e le rette di equazione $x = 1$ e $x = 2$.*

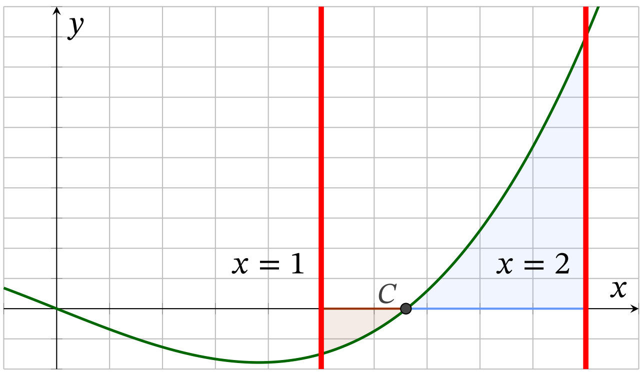
Per trovare l'area richiesta cominciamo con lo studiare il segno della funzione data.

$$\begin{aligned}
&4x^3 - 7x \geq 0 \quad ; \quad x(4x^2 - 7) \geq 0 \\
&x \geq 0 \\
&4x^2 - 7 \geq 0 \quad ; \quad 4x^2 - 7 = 0 \quad ; \quad x^2 = \frac{7}{4} \quad ; \quad x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} \quad ; \quad x \leq -\frac{\sqrt{7}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Componiamo i segni.



A noi interessa la parte della funzione nel primo quadrante. In particolare la funzione è negativa per $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{7}}{2}$ e positiva oltre.
Il grafico di quanto studiato (che possiamo fare tranquillamente anche qualitativo) è il seguente.



L'area che dobbiamo calcolare è la somma delle due aree rossa e celeste evidenziate in figura.

L'area compresa tra la retta $x = 1$ e il punto C (di ascissa $x = \sqrt{7}/2$) è l'integrale seguente.

$$A_r = -\int_1^C (4x^3 - 7x)\,dx \tag{8.2}$$

L'area compresa tra il punto C e la retta $x = 2$ è l'integrale seguente.

$$A_c = \int_C^2 (4x^3 - 7x)\,dx \tag{8.3}$$

L'integrale indefinito associato ai due casi vale:

$$\int (4x^3 - 7x)\,dx = 4\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^2}{2} + c = x^4 - \frac{7}{2}x^2 + c \tag{8.4}$$

Allora le due aree sono:

$$A_r = -\left[x^4 - \frac{7}{2}x^2\right]_1^C = -\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^4 - \frac{7}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] + \left[1^4 - \frac{7}{2}1^2\right] = -\frac{49}{16} + \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{4} + 1 - \frac{7}{2} = \\ = \frac{-49+98+16-56}{16} = \frac{9}{16} \tag{8.5}$$

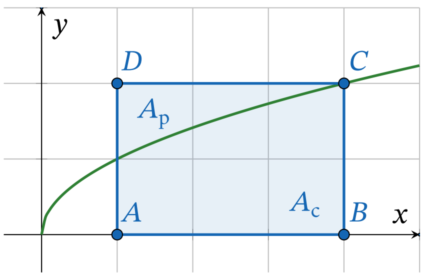
$$A_c = \left[x^4 - \frac{7}{2}x^2\right]_C^2 = \left[2^4 - \frac{7}{2}2^2\right] - \left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^4 - \frac{7}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] = 16 - 14 - \frac{49}{16} + \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{4} = \\ = \frac{256-224-49+98}{16} = \frac{81}{16} \tag{8.6}$$

Infine l'area totale è:

$$A_{tot} = A_r + A_c = \frac{9}{16} + \frac{81}{16} = \frac{90}{16} = \frac{45}{8} \tag{8.7}$$

> **Esame 10** *Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ e $D(1;2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.*

Il testo ci propone un rettangolo parallelo all'asse x e con la base su di esso.
La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è strettamente positiva e crescente in tutto il suo dominio.



L'area A_c sottesa da questa curva rispetto all'asse x (e quindi rispetto alla base del rettangolo) è data dal seguente integrale:

$$A_c = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \tag{8.8}$$

L'integrale indefinito associato a questo integrale è:

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int (x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}} + c \tag{8.9}$$

Per cui:

$$A_c = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} \tag{8.10}$$

Invece l'area del rettangolo A_r è data da:

$$A_r = b \cdot h = (4-1)\cdot(2-0) = 3\cdot 2 = 6 \tag{8.11}$$

La porzione rimanente del rettangolo A_p che non sta sotto la curva $f(x) = \sqrt{x}$ vale:

$$A_\mathrm{p} = A_\mathrm{r} - A_\mathrm{c} = 6 - \frac{14}{3} = \frac{18 - 14}{3} = \frac{4}{3} \tag{8.12}$$

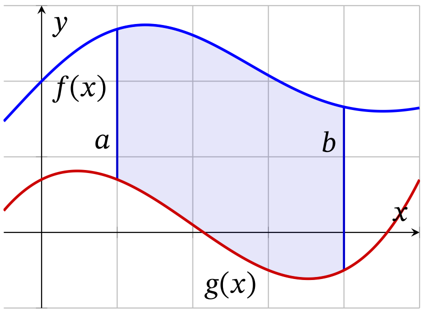
Infine, il rapporto tra l'area sottesa dalla curva e la porzione rimanente del rettangolo vale:

$$\frac{A_\mathrm{c}}{A_\mathrm{p}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \tag{8.13}$$

8.2 Area tra due curve

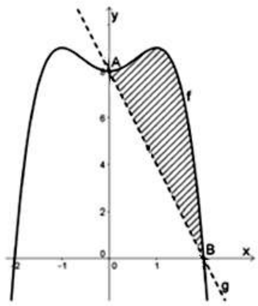
Se abbiamo una regione di piano tra due curve possiamo trovarne l'area ricorrendo ad un integrale definito. In particolare, se abbiamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, con $f(x) > g(x)$ e vogliamo trovare l'area compresa tra i grafici delle due funzioni in un intervallo $[a; b]$, calcoliamo:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Non è importante il segno della singola funzione nell'intervallo dato: la funzione $g(x)$ nel tratto considerato è in parte negativa e in parte positiva, ma non ha importanza. Quello che importa è prendere la differenza tra la funzione maggiore e quella minore.

Esame 11 *Data la funzione* $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$, *sia* g *la retta passante per i punti* $A(0, 8)$ *e* $B(2, 0)$. *Si calcoli l'area della regione tratteggiata indicata in figura.*



Possiamo trovare l'area tratteggiata col metodo indicato all'inizio di questo paragrafo. Ma procediamo in maniera ancor più semplice trovando l'area A_f individuata dalla funzione $f(x)$ rispetto all'asse x e sottraendole l'area A_t del triangolo AOB.

$$A_f = \int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx = \left[-\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + 8x\right]_0^2 = \\ = -\frac{2^5}{5} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2 = \frac{-96 + 80 + 240}{15} = \frac{224}{15} \tag{8.14}$$

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8 \tag{8.15}$$

Infine l'area totale è:

$$A_{\mathrm{tot}} = A_{\mathrm{f}} - A_{\mathrm{t}} = \frac{224}{15} - 8 = \frac{104}{15} \tag{8.16}$$

Altrimenti, col metodo prima illustrato dobbiamo trovare la funzione che descrive la retta g, cioè l'equazione della retta passante per i punti A e B.

$$\begin{aligned} y - y_A &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \\ y - 8 &= \frac{0-8}{2-0}(x - 0) \\ y &= -4x + 8 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Allora l'area, sapendo che in tutto l'intervallo considerato $f(x) > g(x)$, vale:

$$A_{\mathrm{tot}} = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 [(-x^4 + 2x^2 + 8) - (-4x + 8)]\,\mathrm{d}x \tag{8.18}$$

9 Volumi

Volumi di solidi di rotazione intorno all'asse x
Volumi di solidi di rotazione intorno all'asse y
Volumi col metodo dei gusci.

Parte III

Temi d'esame

10 Temi d'esame

1 *Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$, sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.*

Soluzione *Sessione ordinaria 2015, quesito n°1.*

2 *Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ e $D(1;2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.*

Soluzione *Sessione ordinaria 2015, quesito n°10.*

3 *Data la funzione integrale $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.*

Soluzione *Sessione suppletiva 2015, quesito n°1.*

4 *Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla stessa retta.*

Sessione suppletiva 2015, quesito n°5.

5 *Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $P(2;-7)$ e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale $45°$.*

Sessione suppletiva 2015, quesito n°10.

6 *Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla stessa retta.*

Sessione straordinaria 2015, quesito n°1.

7 *Calcolare il valor medio della funzione*

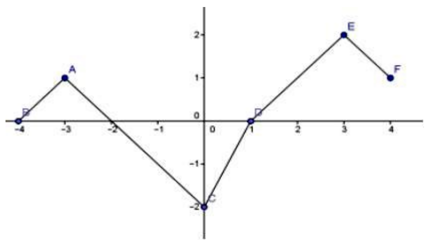
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x \le 3 \\ e^{x-3}+1 & 3 < x \le 6 \end{cases}$$

nell'intervallo $[1;6]$ *e determinare il valore della* x *in cui la funzione assume il valor medio.*

Soluzione — *Sessione straordinaria 2015, quesito n°7.*

8 *La funzione* $f(x)$ *è continua per* $x \in [-4;4]$ *il suo grafico è la spezzata passante per i punti:* $(-4;0)$, $(-3;1)$, $(-2;0)$, $(0;-2)$, $(1;0)$, $(3;2)$, $(4;1)$.

Qual è il valor medio di $f(x)$ *per* $x \in [-4;4]$*?*



Soluzione — *Sessione ordinaria 2015 (Europa), quesito n°1.*

9 *Risolvere l'integrale improprio:* $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Soluzione — *Sessione ordinaria 2015 (Europa), quesito n°5*

10 *Se* $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \frac{1}{1+\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ *per* $x \ge 1$, *qual è il valore di* $f'(2)$ *?*

Soluzione — *Sessione ordinaria 2015 (Europa), quesito n°8*

11 *Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino ad altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:* $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \dfrac{h^3}{3}\right)$.

Sessione ordinaria 2016, quesito n°3.

12 *Data la funzione* $f(x)$ *definita in* $\mathfrak{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x(2x+x^2)$, *individuare la primitiva di* $f(x)$ *il cui grafico passa per il punto* $(1, 2\mathrm{e})$.

Soluzione — *Sessione ordinaria 2016, quesito n°8.*

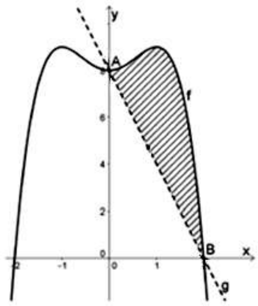
13 *Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1,+\infty)$:*

$$f(x) = \int_{e}^{x^2} \frac{t}{\ln t}\,dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Soluzione *Sessione ordinaria 2016, quesito n°10.*

14 *Data la funzione $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$, sia g la retta passante per i punti $A(0,8)$ e $B(2,0)$. Si calcoli l'area della regione tratteggiata indicata in figura.*



Soluzione *Sessione straordinaria 2016, quesito n°8.*

15 *Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata R, contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y ed i grafici di $y = 2^x$ e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando R attorno all'asse x e all'asse y.*

Soluzione *Sessione straordinaria 2016, quesito n°10.*

16 *Posto, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx$, stabilire il valore di A_1 e dimostrare che, per ogni $n > 0$, si ha $A_n = e - nA_{n-1}$.*

Soluzione *Sessione suppletiva 2016, quesito n°4.*

17 *Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

e l'asse delle x *nell'intervallo* $[0, 3]$*; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse* x *sono tutti triangoli isosceli di altezza* kx*, con* $k \in \Re$*. Determinare* k *in modo che il volume del solido sia pari a* 2*.*

Soluzione *Sessione ordinaria (americhe) 2016, quesito n°4.*

18 *Il grafico di un polinomio di* 3° *grado è tangente all'asse* x *nell'origine e interseca nuovamente l'asse* x *in un punto di ascissa positiva. L'ascissa e l'ordinata del punto di massimo relativo sono tra loro uguali e diverse da* 0*. Determinare l'area della regione piana limitata che è compresa tra l'asse* x *e il grafico del polinomio, sapendo che anche tale area coincide numericamente con il valore comune all'ascissa e all'ordinata nel punto di massimo.*

Soluzione *Sessione ordinaria (americhe) 2016, quesito n°5.*

19 *Sono date le funzioni* $f(x) = \mathrm{e}^{3-x}$ *e* $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$*. Determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse* x *e dai grafici di* f *e di* g*.*

Soluzione *Sessione ordinaria (americhe) 2016, quesito n°7.*

20 *Definito il numero E come:*

$$E = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2E$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

in termini di e *ed* E*.*

Soluzione *Sessione ordinaria 2017, quesito n°1.*

21 *Consideriamo la funzione* $f(x) = e^{3-x}$. *Preso un numero reale* a, *sia* R_a *la regione illimitata formata dai punti aventi ascissa* $x > a$ *che sono compresi tra il grafico di* f *e l'asse* x. *Per quale valore di* a *l'area di* R_a *risulta pari a* 2*?*

Soluzione *Sessione suppletiva 2017, quesito n°1.*

22 *Data la funzione:*

$$f(x) = x^2 + 1 \quad x \in \Re$$

determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y *della porzione di piano delimitata dal grafico di* $f(x)$ *e dall'asse delle ascisse per* $x \in [0; 3]$.

Soluzione *Sessione suppletiva 2017, quesito n°9.*

23 *Un solido ha per base la regione* Π *del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione* $f(x) = x^2 + 2$ *e l'asse delle* x *nell'intervallo* $[0; 2]$. *Per ogni punto* P *di* Π, *di ascissa* x, *l'intersezione del solido col piano passante per* P *e ortogonale all'asse delle* x *è un rettangolo di altezza* $x + 1$. *Calcolare il volume del solido.*

Soluzione *Sessione straordinaria 2017, quesito n°3.*

24 *Data la funzione integrale:*

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln(t)\, dt$$

calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

Soluzione *Sessione straordinaria 2017, quesito n°10.*

25 *Determinare* a *in modo che:*

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)\, dx$$

sia uguale a 10.

Soluzione *Sessione ordinaria 2018, quesito n°8.*

26 *Si consideri la funzione* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *nell'intervallo* $[p, 2p]$ *e, detto* Γ *il suo grafico, sia* t *la retta tangente a* Γ *nel suo punto di ascissa* p. *Determinare, al variare di* p, *le aree delle due parti in cui la retta* t *divide la regione finita di piano compresa fra* Γ *e l'asse delle ascisse.*

Soluzione *Sessione suppletiva 2018, quesito n°2.*

27 *Verificare che* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$ *per* $n > 1$ *e usare questo risultato per calcolare* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$.

Soluzione *Sessione suppletiva 2018, quesito n°4.*

28 *Date le curve* γ_1 *e* γ_2 *di equazioni rispettivamente* $y = x^2 + 1$ *e* $y = x^2 - 8x + 9$*, sia* t *la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da* γ_1*,* γ_2 *e* t.

Soluzione *Sessione suppletiva 2018, quesito n°8.*

29 *Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

le rette $y = 2$*,* $x = 5$ *e l'asse* y.

Soluzione *Sessione straordinaria 2018, quesito n°5.*

30 *É assegnata la funzione* $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ *così definita:*

$$f(x) = \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Studiare il segno della funzione f *e provare che essa è crescente. Determinare il valore di*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione *Sessione suppletiva 2019, quesito n°2.*

31 *Data la funzione* $f(x) = x\sin x$ *e fissato un numero* $k > 0$*, provare che il valore di*

$$f(x) = \int_0^{x_0} k \cdot f(kx)\,\mathrm{d}x$$

(dove x_0 *indica il minimo numero reale positivo per cui* $f(kx_0) = 0$*) non dipende dalla scelta di* k.

Soluzione *Sessione straordinaria 2019, quesito n°2.*

32 *Determinare le ascisse dei punti di massimo e di minimo locali della funzione*

$$f(x) = \int_4^x (3^{5t-t^2} - 1)\,\mathrm{d}t$$

Soluzione *Sessione ordinaria 2019 (australe), quesito n°2.*

33 *Dopo aver verificato che la curva di equazione* $|y| + |x|^3 = 1$ *è simmetrica sia rispetto all'asse* x *sia rispetto all'asse* y*, determinare l'area della regione piana delimitata da tale curva.*

Soluzione *Sessione ordinaria 2019 (boreale), quesito n°2.*

Indice analitico

funzione integrale, 31

media integrale, 35

teorema fond. del calcolo integrale, primo, 32
teorema fond. del calcolo integrale, secondo, 32

valor medio, 35