

Derivate

esercizi svolti e ordinati per competenze
e temi d'esame

Massimiliano Virdis

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Licenza e Copyright	1
1.2	Ringraziamenti	2
I	Derivata e derivabilità	3
2	La definizione di derivata	5
2.1	Trovare la derivata di una funzione dalla definizione	5
3	Calcolo delle derivate	7
3.1	Derivate di funzioni elementari	7
4	Derivabilità	11
4.1	Studio della derivabilità	12
II	Applicazioni della derivata	13
5	Rette tangenti e normali	15
5.1	Retta tangente per un punto non appartenente alla funzione	16
5.2	Curve tangenti	18
5.3	Angolo tra curve che si intersecano	20
6	Teorema di Rolle e Lagrange	21
6.1	Teorema di Rolle e ricerca del punto garantito dal teorema	21
6.2	Teorema di Lagrange e ricerca del punto garantito dal teorema	23
6.3	Ricerca ed esistenza degli zeri di una funzione	26
7	Studio dei massimi e minimi	29
8	Studio dei flessi	37
III	Temi d'esame	39
9	Temi d'esame	41

Caro lettore,

questi appunti sono relativi alle derivate e le loro applicazioni, quali si studiano attualmente al liceo scientifico, con particolare riferimento ai quesiti dell'esame di maturità; sono pensati come sintesi per un ripasso, facendo riferimento a tutte le competenze necessarie per svolgere quei quesiti. Se qualche passaggio appare svolto in maniera troppo estesa e particolareggiata si porti pazienza: i più bravi e capaci capiranno lo stesso, ma non lasceremo indietro i meno bravi.

Questi appunti sono un supporto e complemento ai normali testi scolastici.

Spero che quanto riportato in quest'opera sia se non di aiuto almeno non dannoso. Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.1 Licenza e Copyright

**Questo file e documento viene concesso con licenza Creative Commons.
CC BY-NC-ND.**

- Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
- Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
- Non puoi alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.



δωρεὰν ἐλάβετε, δωρεὰν δότε (Mt. 7.8)

1.2 Ringraziamenti

Si ringraziano coloro che hanno avuto la pazienza di leggere queste pagine e di segnalare errori di vario tipo. In particolare:

Parte I

Derivata e derivabilità

2

La definizione di derivata

Abbiamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno completo di un punto x_0 .
La **derivata** $f'(x_0)$ della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è definita come:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (2.1)$$

quando il limite esiste ed è finito.

Il rapporto utilizzato nella definizione è detto rapporto incrementale.

2.1 Trovare la derivata di una funzione dalla definizione

ESAME 1 Calcolare la derivata $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.

Applichiamo la definizione di derivata alla funzione data:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} \quad (2.2)$$

Togliamo le parentesi e applichiamo le proprietà delle potenze per sviluppare l'espressione.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{x+h} + h \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x \cdot e^h + h \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x (e^h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot e^{x+h}}{h} & \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ricordiamo il limite notevole:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (2.4)$$

Per cui infine il valore finale del limite è

$$x \cdot e^x + e^x \quad (2.5)$$

ESAME 2 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.

Applichiamo la definizione di derivata alla funzione data:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \quad (2.6)$$

Applichiamo le proprietà delle differenze tra logaritmi e di un numero per un logaritmo.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \quad (2.7)$$

Ricordiamo il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k \quad (2.8)$$

dove nel nostro problema la variabile non si chiama x bensì h e la costante k è $\frac{1}{x}$.

Infine possiamo scrivere:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x} \quad (2.9)$$

3

Calcolo delle derivate

3.1 Derivate di funzioni elementari

Regole fondamentali

$$D[\alpha f(x)] = \alpha f'(x)$$

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

$$D[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right]$$

Derivate di funzioni elementari

$$D[k] = 0$$

$$D[x] = 1$$

$$D[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D[e^x] = e^x$$

$$D[a^x] = a^x \ln a$$

$$D[\ln x] = \frac{1}{x}$$

$$D[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$$

$$D[\sin x] = \cos x$$

$$D[\cos x] = -\sin x$$

$$D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D[|x|] = \frac{|x|}{x}$$

ESAME 3 Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

La superficie di una sfera vale $S = 4\pi r^2$. La velocità di crescita della superficie va intesa come la derivata rispetto al tempo della superficie stessa. Facendo attenzione al fatto che $r(t)$ è una funzione del tempo e se deriviamo la superficie stiamo derivando una funzione composta otteniamo:

$$S'(r) = 4\pi \cdot 2r(t)r'(t) = 8\pi r(t)r'(t) \quad (3.1)$$

Scriviamo l'eguaglianza indicata del testo.

$$S'(r) = 8\pi r(t)r'(t) = r'(t) \quad (3.2)$$

Semplificando otteniamo:

$$8\pi r(t) = 1 \quad ; \quad r = \frac{1}{8\pi} \quad (3.3)$$

ESAME 4 Sia $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Determinare $f^{(2007)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

Facciamo le derivate successive sino alla quarta della funzione data.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos x - \sin x \\ f^{(2)}(x) &= -\sin x - \cos x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x + \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x + \cos x \end{aligned} \quad (3.4)$$

Arrivati alla derivata quarta riotteniamo la funzione di partenza e così otterremo se faremo tante derivate quante un multiplo intero di 4. Il numero 2007 si può scrivere come:

$$2007 = 2004 + 3 = 501 \cdot 4 + 3 \quad (3.5)$$

Questo vuol dire che alla derivata 2004 abbiamo ancora la funzione di partenza perché abbiamo derivato un multiplo intero di 4 volte. Dopo altre tre derivate otteniamo la derivata terza.

$$f^{(2007)}(x) = f^{(3)}(x) = -\cos x + \sin x \quad (3.6)$$

ESAME 5 Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0,1 \text{ m}^3$ e sta diminuendo alla velocità di $1200 \text{ cm}^3/\text{sec}$.

Dato uno spigolo l il volume del cubo è $V = l^3$. Qui dobbiamo considerare la velocità di variazione dello spigolo, quindi prendiamo la funzione inversa e la deriviamo rispetto al tempo. Esplicitiamo il fatto che sia lo spigolo che il volume sono funzioni del tempo.

$$l = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$$

$$l'(t) = \frac{1}{3} V(t)^{-\frac{2}{3}} V'(t) = \frac{V'(t)}{3V(t)^{\frac{2}{3}}} \quad (3.7)$$

Nel testo non viene indicata la legge con cui sta variando il volume del cubo, né l'istante in cui il volume è quello dato. Possiamo solo sapere qual è in un certo istante il volume e la sua velocità di diminuzione: calcoliamo la velocità di variazione dello spigolo in quell'istante.

Prima di procedere trasformiamo le due unità di misura in modo che siano coerenti.

$$1200 \text{ cm}^3/\text{s} = 1200 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = 1,200 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad (3.8)$$

Dal testo, con opportuna notazione sappiamo:

$$V'(t_0) = 1,200 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V(t_0) = 0,1 \text{ m}^3 \quad (3.9)$$

Sostituendo otteniamo:

$$l'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{3V(t_0)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1,200 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{3 \cdot (0,1 \text{ m}^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{0,004}{\sqrt[3]{10}} \text{ m/s} \quad (3.10)$$

Lo spigolo sta *diminuendo* a questa velocità: potevamo anche indicare la velocità del volume e dello spigolo in negativo.

Abbiamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno completo di un punto x_0 .
La **derivata destra** $f'_+(x_0)$ della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è definita come:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \quad (4.1)$$

quando il limite esiste ed è finito.

La **derivata sinistra** $f'_-(x_0)$ della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è definita come:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \quad (4.2)$$

quando il limite esiste ed è finito.

Evidentemente una funzione è derivabile in un punto quando la derivata destra e sinistra coincidono e sono finite. Specificare i due aspetti del limite ci consente di avere un criterio di derivabilità anche per punti nei quali non riusciamo a esprimere direttamente la derivata o per classificare i punti in cui la derivata non esiste proprio.

Criterio di derivabilità

Abbiamo una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b) tranne al più il punto $x_0 \in (a, b)$. Se esistono finite e uguali le derivate destra e sinistra della funzione nel punto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'_-(x_0) = l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'_+(x_0) \quad (4.3)$$

allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta $f'(x) = l$.

Esiste un legame fondamentale tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.

Derivabilità e continuità

Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0 , allora in quel punto è anche continua.

La continuità di una funzione in un punto invece *non implica* la sua derivabilità, ma ne è condizione necessaria.

4.1 Studio della derivabilità

Se la funzione è definita in un punto, *per il quale esista un intorno completo*, ma lì non è derivabile e *neanche continua*, classifichiamo il punto a seconda del valore delle derivate destra e sinistra.

Punti di non derivabilità

1. **Punto angoloso**: se almeno una delle derivate destra o sinistra nel punto esiste ed è finita.
2. **Cuspide**: se la derivata destra e sinistra nel punto tendono entrambe all'infinito, ma con segno discorde.
3. **Flesso a tangente verticale**: se la derivata destra e sinistra nel punto tendono entrambe all'infinito, ma con segno concorde

Se invece abbiamo solo un intorno destro o sinistro del punto allora normalmente non lo classifichiamo tra i punti di non derivabilità, ma evidenziamo eventualmente quanto segue:

Tangente verticale: se siamo agli estremi del campo di esistenza in un punto finito e possiamo fare la derivata solo da destra o da sinistra e la derivata tende all'infinito.

Studio della derivabilità e dei punti di non derivabilità di una funzione

1. Troviamo il dominio della funzione.
2. Studiamo la continuità della funzione, in particolare facendo il limite agli estremi del campo di esistenza là dove la funzione non è definita.
3. Facciamo la derivata e ne determiniamo il rispettivo dominio, escludendo gli intervalli che escono dal dominio della funzione e quelli un cui la funzione è definita, ma non continua.
4. Studiamo i punti di non derivabilità, in particolare facendo il limite agli estremi del campo di esistenza, là dove la funzione non è definita, e nei punti di transizione tra una espressione della derivata e un'altra.

Trovare parametro per cui una funzione è continua

Trovare parametro per cui una funzione è derivabile

Parte II

Applicazioni della derivata

5

Rette tangenti e normali

Retta tangente

La derivata di una funzione in un suo punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto.

Abbiamo una funzione $f(x)$ derivabile in un punto x_0 .

Allora la retta tangente al grafico della funzione in quel punto ha equazione:

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (5.1)$$

dove $y_0 = f(x_0)$

Retta normale

Se una retta ha coefficiente angolare m , la perpendicolare alla retta ha coefficiente angolare $m' = -1/m$.

Abbiamo una funzione $f(x)$ derivabile in un punto x_0 .

Allora la retta normale al grafico della funzione in quel punto ha equazione:

$$(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (5.2)$$

dove $y_0 = f(x_0)$

ESAME 6 Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$, trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

La tangente passante per il punto dato ha lo stesso coefficiente angolare della bisettrice del primo quadrante ($y = x$), quindi $m = 1$. La derivata della funzione calcolata nel punto $x = 3$ deve avere lo stesso valore: questa condizione ci permette di trovare il valore di k .

$$f'(x) = -3x^2 + 6k \quad (5.3)$$

$$f'(3) = 1 = -3 \cdot 3^2 + 6k \quad ; \quad -27 + 6k = 1 \quad ; \quad 6k = 28 \quad ; \quad k = \frac{28}{6} \quad (5.4)$$

Possiamo scrivere l'espressione della $f(x)$

$$f(x) = -x^3 + 6kx + 33 = -x^3 + 6 \cdot \frac{28}{6}x + 33 = -x^3 + 28x + 33 \quad (5.5)$$

Adesso possiamo applicare la formula della tangente dove:

$$\begin{aligned}x_0 &= 3 \\y_0 &= f(x_0) = f(3) = -3^3 + 28 \cdot 3 + 33 = -27 + 84 + 33 = 90 \\f'(x_0) &= f'(3) = 1\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}(y - 90) &= 1(x - 3) \\y &= x - 3 + 90 \\y &= x + 87\end{aligned}\tag{5.7}$$

5.1 Retta tangente per un punto non appartenente alla funzione

A volte c'è l'indicazione di trovare la (o le) retta tangente al grafico di una curva, ma di questa tangente si sa che passa per un punto $P(x_p; y_p)$, ma non si sa in quale punto $T(x_0; y_0)$ sia tangente.

Se abbiamo una funzione $f(x)$ derivabile in un punto x_0 , Allora la retta tangente al grafico della funzione in quel punto ha equazione:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\tag{5.8}$$

dove $y_0 = f(x_0)$.

Noi non conosciamo x_0 , ma sappiamo per che un punto in cui passa la tangente è il punto P , quindi l'equazione precedente deve essere soddisfatta per $x = x_p$ e per $y = y_p$.

Allora l'equazione della tangente diventa.

$$\begin{aligned}y_p - y_0 &= f'(x_0)(x_p - x_0) \\y_p - f(x_0) &= f'(x_0)(x_p - x_0)\end{aligned}\tag{5.9}$$

L'equazione precedente ha come unica incognita x_0 . Una volta risolta l'equazione possiamo trovare le coordinate del punto di tangenza e scrivere esplicitamente l'equazione della retta tangente.

Facciamo attenzione al fatto che in generale $y_p \neq f(x_p)$, cioè il punto per cui passa la retta non è detto appartenga al grafico della funzione.

Esercizio 1 Trova l'equazione della retta tangente al grafico di $y = 3x^2 + x - 2$ e passante per il punto $P(1; 2)$.

In riferimento a quanto esposto nel riquadro precedente possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}x_p &= 1 \\y_p &= 2 \\y_0 &= f(x_0) = 3x_0^2 + x_0 - 2 \\f'(x_0) &= 6x_0 + 1\end{aligned}\tag{5.10}$$

Quindi la retta tangente nel punto incognito $T(x_0; y_0)$ ha equazione:

$$\begin{aligned}y_p - f(x_0) &= f'(x_0)(x_p - x_0) \\2 - (3x_0^2 + x_0 - 2) &= (6x_0 + 1)(1 - x_0) \\2 - 3x_0^2 - x_0 + 2 &= 6x_0 - 6x_0^2 + 1 - x_0 \\3x_0^2 - 6x_0 + 3 &= 0 \\x_0^2 - 2x_0 + 1 &= 0 \\(x_0 - 1)^2 &= 0 \\x_0 &= 1\end{aligned}\tag{5.11}$$

Quindi, in particolare:

$$y_0 = f(x_0) = 3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 2 \quad ; \quad f'(x_0) = 6 \cdot 1 + 1 = 7\tag{5.12}$$

Infine la retta tangente ha equazione:

$$\begin{aligned}y - 2 &= 7(x - 1) \\y &= 7x - 7 + 2 \\y &= 7x - 5\end{aligned}\tag{5.13}$$

5.2 Curve tangenti

I grafici di due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ si dicono tangenti in un punto se si intersecano in quel punto e le tangenti alle curve in quel punto coincidono, ovvero hanno la stessa derivata prima in quel punto.

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (5.14)$$

Esercizio 2 Verifica che le curve di equazione $y = x^2$ e $y = 2e \ln x$ sono tangenti nel loro punto di intersezione e trova le coordinate di questo punto.

Se valgono le condizioni descritte dall'esercizio allora il seguente sistema deve avere una sola soluzione che ci fornisce il punto di intersezione e tangenza. Prima di scriverlo determiniamo le derivate delle due funzioni.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \\ g'(x) &= \frac{2e}{x} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} x^2 = 2e \ln x \\ 2x = \frac{2e}{x} \end{cases} \quad (5.16)$$

Risolviamo il sistema mettendo in evidenza la x nella seconda equazione.

$$\begin{aligned} \text{C.E. } x &\neq 0 \wedge x > 0 \\ 2x &= \frac{2e}{x} \\ x^2 &= \frac{2e}{2} = e \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sostituiamo nella prima.

$$\begin{aligned} e &= 2e \ln x \\ 1 &= \ln x^2 \\ x^2 &= e \\ x &= \sqrt{e} \implies y = x^2 = e \end{aligned} \quad (5.18)$$

Il sistema ha una sola soluzione; il punto di intersezione ha coordinate $P(\sqrt{e}, e)$.

ESAME 7 Determinare il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.

Se i grafici delle due curve sono tangenti allora, in almeno un punto, hanno lo stesso coefficiente angolare e quindi uguale derivata prima: eguagliamo le derivate delle due funzioni.

$$\begin{aligned} 2x &= -2x + 4 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

La condizione data si ha solo in un punto di ascissa $x = 1$.

Se le funzioni sono tangenti allora hanno anche un punto in comune. Imponiamo che l' y associata alla x data sia la stessa per le due funzioni.

$$\begin{aligned}x^2 &= -2x^2 + 4x - a \\1 &= -2 + 4 - a \\a &= 1\end{aligned}\tag{5.20}$$

Il valore del parametro a che rende possibile quanto richiesto nel testo è solo $a = 1$.

Un punto generico della prima curva ha coordinate $(x; x^2)$. Per cui le coordinate del punto di tangenza T sono:

$$x = 1 \Rightarrow T \equiv (1; 1)\tag{5.21}$$

ESAME 8 Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Se le curve sono tangenti in un punto devono valere le condizioni espresse dal seguente sistema, ovvero avere la stessa derivata prima e intersecarsi in quello stesso punto.

$$\begin{cases}f(x) = g(x) \\f'(x) = g'(x)\end{cases}\tag{5.22}$$

Imponiamo la seconda condizione, calcoliamo le derivate prime ed eguagliamole.

$$\begin{aligned}r : \quad y' &= -4 \\c : \quad y' &= 3x^2 - 8x\end{aligned}\tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}-4 &= 3x^2 - 8x \\3x^2 - 8x + 4 &= 0 \\x_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \\x_1 &= \frac{8+4}{6} = 2 \quad ; \quad x_2 = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}\end{aligned}\tag{5.24}$$

Imponiamo, in corrispondenza dei valori ottenuti, che valga anche la prima condizione del sistema.

$$-4x + k = x^3 - 4x^2 + 5\tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}-4 \cdot 2 + k &= (2)^3 - 4(2^2) + 5 \\k &= 8 + 8 - 16 + 5 = 5\end{aligned}\tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}-4 \cdot \frac{2}{3} + k &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \\-\frac{8}{3} + k &= \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + 5 \\k &= \frac{8}{3} + \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + 5 = \frac{167}{27}\end{aligned}\tag{5.27}$$

5.3 Angolo tra curve che si intersecano

L'angolo formato dai grafici di due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ nel loro punto di intersezione è quello formato dalle rette tangenti alle curve in quel punto (quando esistono).

Per cui, ricordando che l'angolo formato da una retta con l'asse x è l'arcotangente del coefficiente angolare, e che questo, per la retta tangente, è dato dalla derivata prima, possiamo scrivere:

$$\alpha = |\arctan f'(x_0) - \arctan g'(x_0)| = \arctan \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right| \quad (5.28)$$

6

Teorema di Rolle e Lagrange

6.1 Teorema di Rolle e ricerca del punto garantito dal teorema

Abbiamo una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, derivabile in tutti i suoi punti interni (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = 0 \quad (6.1)$$

ESAME 9 Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto nell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

La funzione è il valore assoluto di un polinomio: un polinomio è continuo su tutto l'asse reale e il valore assoluto non modifica la continuità, quindi la funzione è continua per $\forall x \in \mathbb{R}$. Procediamo facendo la derivata e analizzandone le caratteristiche, partendo dall'espressione estesa del valore assoluto di $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } 4 - x^2 \geq 0 \\ -4 + x^2 & \text{se } 4 - x^2 < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} & 4 - x^2 \geq 0 \\ 4 - x^2 = 0 & \quad ; \quad x^2 = 4 \quad ; \quad x = \pm 2 \\ & x \leq -2 \vee x \geq 2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Riscriviamo quindi la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -4 + x^2 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases} \quad (6.4)$$

Di conseguenza la derivata è:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < -2 \vee x > 2 \\ 2x & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases} \quad (6.5)$$

Bisogna controllare il valore della derivata nei punti di raccordo tra i casi: lo facciamo controllando che le derivate destra e sinistra in -2 e 2 siano uguali.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} -2x = 4 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x = -4 \quad (6.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -2x = -4 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = 4 \quad (6.7)$$

Di conseguenza la funzione non è derivabile in -2 e 2 , all'interno dell'intervallo $[-3; 3]$: non sussistono le condizioni per il teorema di Rolle.

Tuttavia la derivata si annulla in un punto all'interno di quell'intervallo.

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 \quad (6.8)$$

Questo fatto non contraddice il teorema, perché il teorema non stabilisce una condizione necessaria, ma solo sufficiente, per l'annullarsi della derivata all'interno dell'intervallo.

6.2 Teorema di Lagrange e ricerca del punto garantito dal teorema

Abbiamo una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile in tutti i suoi punti interni (a, b) . Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (6.9)$$

interpretazione geometrica

Esercizio 3 Data la funzione

$$\frac{3}{x+1}$$

stabilire se nell'intervallo $[2, 4]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del problema assicura l'esistenza.

Stabiliamo il dominio della funzione: è una funzione algebrica quindi il dominio è dato da

$$x + 1 \neq 0 \quad ; \quad x \neq -1 \quad (6.10)$$

Per cui la funzione è definita nell'intervallo dato ed essendo una frazione algebrica in quell'intervallo è anche continua. Facciamo la derivata e verifichiamo se è anche derivabile.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x+1) - 3 \cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2} \quad (6.11)$$

Valgono le stesse considerazioni di prima quindi, nell'intervallo dato, la funzione è anche derivabile.

Per trovare il (i) punto stabilito dal problema determiniamo il valore del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} f(a) &= f(2) = \frac{3}{2+1} = 1 \\ f(b) &= f(4) = \frac{3}{4+1} = \frac{3}{5} \\ a &= 2; b = 4 \\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{\frac{3}{5} - 1}{4 - 2} = \frac{\frac{3-5}{5}}{2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Infine:

$$\begin{aligned} f'(c) &= -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{(c+1)^2} &= -\frac{1}{5} \\ 15 &= (c+1)^2 \\ \pm\sqrt{15} &= c+1 \\ c &= -1 \pm \sqrt{15} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dei due valori ottenuti l'unico contenuto nell'intervallo dato è $c = -1 + \sqrt{15} \simeq 2,87$.

Nei quesiti di maturità è più frequente che la funzione sia definita per casi in quanto questa condizione implica il comprendere volta per volta quale caso sia da scegliere.

ESAME 10 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del problema assicura l'esistenza.

La funzione data è formata da due polinomi, quindi due funzioni continue su tutto \mathfrak{R} . Controlliamo la continuità nel punto di raccordo tra i due casi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 &= 1^3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - kx + k &= 1^2 - k + k = 1 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Il limiti hanno lo stesso valore: la funzione è continua anche in 1 e vale la prima condizione per l'applicazione del teorema di Lagrange.

Calcoliamo la derivata della funzione.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - k & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (6.15)$$

La funzione è derivabile: imponiamo la derivabilità anche nel punto di raccordo tra i due casi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x^2 &= 3 \cdot 1^2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - k &= 2 - k \\ 3 &= 2 - k \\ k &= 2 - 3 = -1 \end{aligned} \quad (6.16)$$

La funzione è derivabile nell'intervallo dato per $k = -1$: valgono tutte le ipotesi del teorema di Lagrange, per cui deve esistere almeno un punto c tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (6.17)$$

In questo caso:

$$\begin{aligned} a &= 0 \quad ; \quad b = 2 \\ f(a) &= f(0) = 0^3 = 0 \\ f(b) &= f(2) = 2^2 - (-1)(2) - 1 = 4 + 2 - 1 = 5 \\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{5 - 0}{2 - 0} = \frac{5}{2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Cerchiamo un punto c tale che $f'(c) = 5/2$. Dal momento che la funzione è definita per casi dobbiamo cercare il punto c separatamente per le due funzioni espresse nei due casi.

Primo caso

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{5}{2} = 3c^2 \\ c^2 &= \frac{5}{6} \\ c &= \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0,91 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Dei due valori ottenuti l'unico contenuto nell'intervallo $[0; 1]$ è $c = +\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Secondo caso

$$\begin{aligned}f'(c) &= \frac{5}{2} = 2c + 1 \\2c &= \frac{5}{2} - 1 = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \\c &= \frac{3}{4} = 0,75\end{aligned}\tag{6.20}$$

Il valore ottenuto non fa parte dell'intervallo $(1; 2]$, quindi non ci sono soluzioni per questo caso.

ESAME 11 *Rappresentare il grafico della funzione:*

$$f(x) = \left| \frac{3-2x}{x-3} \right| \tag{6.21}$$

Verificare se negli intervalli $[0; 2]$ e $[4; 6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a; b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

6.3 Ricerca ed esistenza degli zeri di una funzione

Teorema degli zeri

Abbiamo una funzione $f(x)$ *continua* in intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e inoltre $f(a) \cdot f(b) < 0$, cioè la funzione assume valori opposti agli estremi.

Allora esiste *almeno* un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f(c) = 0 \quad (6.22)$$

Teorema di unicità degli zeri

Abbiamo una funzione $f(x)$ *continua e derivabile* in in intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, cioè la funzione assume valori opposti agli estremi e inoltre $f'(x) \neq 0$ nell'intervallo. Allora esiste *un unico* punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f(c) = 0 \quad (6.23)$$

ESAME 12 *Provare che la funzione $y = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - \arctan x$ non ne ha alcuno.*

La prima funzione è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a causa della funzione tangente. L'esponenziale è definito su tutto l'asse reale ed è positivo dappertutto.

Studiamo quello che accade in un qualsiasi sottointervallo tra due punti successivi in cui la tangente non è definita, ad esempio in $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

La tangente ha come codominio tutti i numeri reali, positivi per $x > 0$ e negativi $x < 0$.

In particolare

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} e^x - \tan x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^x - \tan x = -\infty \quad (6.24)$$

Per cui è sempre possibile trovare un intervallo chiuso e limitato all'interno dell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ in cui la funzione è continua e ai cui estremi assume valori di segno opposto. Per il teorema degli zeri esiste almeno un punto in cui la funzione ha uno zero. A causa della periodicità della tangente questo ragionamento può essere proposto in ognuno degli intervalli in cui è continua: *la prima funzione proposta ha quindi infiniti zeri.*

La seconda funzione è definita in tutto l'asse reale.

L'esponenziale è positivo dappertutto invece l'arcotangente è positivo per $x > 0$ e negativo altrimenti. Siccome l'arcotangente è sottratto all'esponenziale vuol dire che per $x < 0$ abbiamo la somma di due funzioni sempre strettamente positive e in quell'intervallo non ci possono essere zeri.

Concentriamoci per $x \geq 0$. Per $x = 0$ $f(0) = e^0 - \arctan(0) = 1 > 0$. Invece all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \arctan x = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty \quad (6.25)$$

e non possiamo applicare il teorema degli zeri perché agli estremi dell'intervallo $[0; +\infty)$ la funzione è sempre positiva.

Studiamo l'eventuale monotonia della funzione, facendo riferimento alla sua derivata prima.

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x^2} \quad (6.26)$$

La derivata prima è la somma di un termine (e^x) positivo e maggiore di uno, meno un termine ($1/(1+x^2)$) minore di uno dato che il denominatore è sempre più grande del numeratore. La somma di questi due termini è positiva $\forall x > 0$. Allora la funzione è strettamente crescente e monotona: se parte da un numero positivo non potrà mai annullarsi.

La seconda funzione proposta non ha neanche uno zero.

ESAME 13 Dimostrare che l'equazione

$$\arctan(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale

7

Studio dei massimi e minimi

Per studiare i massimi e minimi relativi di una funzione $f(x)$ in un intervallo I nel quale la funzione sia ovunque derivabile :

1. Troviamo i punti stazionari $f'(x) = 0$.
2. Studiamo il segno della derivata nell'intorno di ogni punto stazionari x_0 . Se:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ per } x < x_0 \text{ e } f'(x) < 0 \text{ per } x > x_0 &\Rightarrow \text{massimo} \\ f'(x) < 0 \text{ per } x < x_0 \text{ e } f'(x) > 0 \text{ per } x > x_0 &\Rightarrow \text{minimo} \end{aligned}$$

ESAME 14 Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2 ,$$

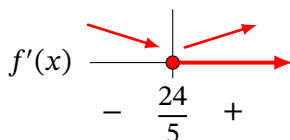
determinare il minimo di f .

La funzione data è un polinomio: per cui è sicuramente continua e derivabile. Per studiare i massimi e minimi troviamo innanzitutto la derivata prima.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - 1) + 2(x - 2) + 2(x - 3) + 2(x - 4) + 2(x - 5) = \\ &= 2x - 2 + 2x - 4 + 2x - 6 + 2x - 8 + 2x - 10 = \\ &= 10x - 48 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Studiamo il segno della derivata.

$$f'(x) \geq 0 \quad ; \quad 10x - 48 \geq 0 \quad ; \quad x \geq \frac{48}{10} = \frac{24}{5} \tag{7.2}$$

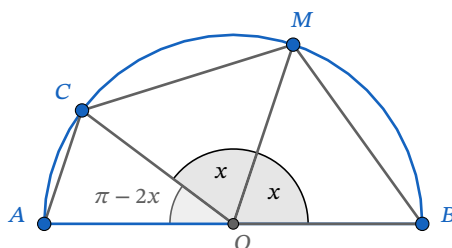


Lo studio del segno ci indica che il punto $x = \frac{24}{5}$ è un punto di minimo, il punto cercato.

ESAME 15 Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco \widehat{BC} . Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.

L'area di un triangolo con due lati a e b può essere trovata con la relazione $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ dove γ è l'angolo compreso tra i due lati.

Se riportiamo il punto C e M sulla semicirconferenza otteniamo tre triangoli isosceli, tutti con due lati pari al raggio. Indichiamo con x l'angolo al centro incognito del triangolo OBM e OMC .



Osservando la figura possiamo vedere tre triangoli e la loro area totale vale:

$$A_{\text{tot}} = \frac{1}{2}r^2 \sin x + \frac{1}{2}r^2 \sin x + \frac{1}{2}r^2 \sin(\pi - 2x) \quad (7.3)$$

Sviluppiamo l'espressione dell'ultimo seno.

$$\sin(\pi - 2x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (7.4)$$

Infine l'area totale vale:

$$A_{\text{tot}} = \frac{1}{2}r^2(2 \sin x + 2 \sin x \cos x) = r^2 \sin x(1 + \cos x) \quad (7.5)$$

Tralasciamo il fattore costante r^2 : della funzione $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$ che rimane dobbiamo trovare il massimo. Per cui ne facciamo la derivata e ne studiamo il segno.

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + 2 \cos^2 x - 1 \quad (7.6)$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0 \quad (7.7)$$

La nostra disequazione goniometrica è del tipo riconducibile ad algebrica. Procediamo con un cambio di variabile.

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ 2t^2 + t - 1 &\geq 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Risolviamo la disequazione algebrica ottenuta risolvendo innanzi tutto l'equazione associata.

$$2t^2 + t - 1 = 0 \quad (7.9)$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1))}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad (7.10)$$

$$t_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad t_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

La parabola associata alla disequazione di secondo grado ha la concavità verso l'alto e la positività è negli intervalli esterni.

$$t \leq -1 \quad \vee \quad t \geq \frac{1}{2} \quad (7.11)$$

Risostituiamo alla variabile z la funzione goniometrica e risolviamo le due disequazioni elementari che otteniamo.

$$\text{I Disequazione} \quad \cos x \leq -1 \quad (7.12)$$

La disequazione ha come unica soluzione:

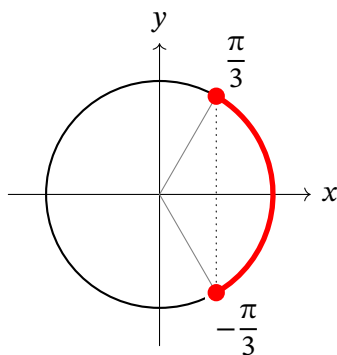
$$x = -\pi + 2k\pi \quad (7.13)$$

$$\text{II Disequazione} \quad \cos x \geq \frac{1}{2} \quad (7.14)$$

Troviamo le soluzioni fondamentali dell'equazione associata con la calcolatrice o a mente:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{3} \quad (7.15)$$

Queste sono le due soluzioni base. Le rappresentiamo con una linea continua terminante con un pallino pieno dato che nella disequazione è presente anche l'uguale.



La domanda implicita nella disequazione è: quali sono gli archi per cui il coseno dell'angolo è maggiore di un certo numero? La risposta sta nell'arco posto più a destra dei due angoli trovati, ovvero quell'arco segnato in rosso nella figura.

Per indicare quell'arco non possiamo andare senza soluzione di continuità dal primo angolo al secondo. La soluzione relativa alla circonferenza goniometrica è:

$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \quad (7.16)$$

Se consideriamo anche la periodicità della funzione seno possiamo scrivere:

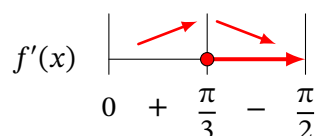
$$2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (7.17)$$

Infine.

La soluzione finale è l'unione delle due soluzioni trovate quindi possiamo scrivere:

$$x = -\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (7.18)$$

A questo punto osserviamo che dobbiamo studiare il segno di x solo tra 0 e $\pi/2$: infatti l'angolo x può variare solo tra i valori estremi indicati. Si raggiunge $\pi/2$ quando il punto C coincide col punto A . Quindi:



Il punto $x = \pi/3$ è un punto di massimo ed è l'angolo cercato.

L'area del quadrilatero è:

$$A_{\max} = r^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) = r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = r^2 \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (7.19)$$

ESAME 16 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

La parabola proposta ha la concavità verso il basso ed è simmetrica rispetto all'asse y .

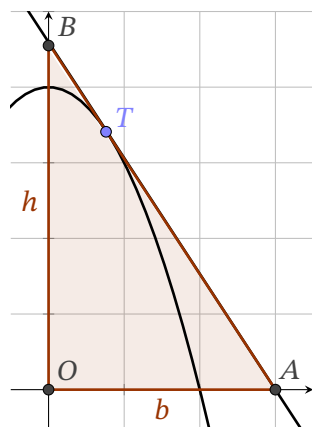
Un punto generico $(x_0; y_0)$ della parabola ha coordinate:

$$(x_0; 4 - x_0^2) \quad (7.20)$$

La derivata della funzione data è $f'(x) = -2x$.

La retta tangente al grafico della funzione in un punto generico $(x_0; y_0)$ ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - (4 - x_0^2) &= (-2x_0)(x - x_0) \\ y &= 4 - x_0^2 - 2xx_0 + 2x_0^2 \\ y &= x_0^2 - 2xx_0 + 4 \end{aligned} \quad (7.21)$$



Questa retta incontra in un punto l'asse x e l'asse y (a meno che non passi per il vertice), individuando un triangolo. Determiniamo le coordinate di questi due punti.

$$\text{Punto } B \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = x_0^2 - 2xx_0 + 4 \end{cases} \quad ; \quad y = x_0^2 + 4 \quad (7.22)$$

$$\text{Punto } A \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = x_0^2 - 2xx_0 + 4 \end{cases} \quad ; \quad x_0^2 - 2xx_0 + 4 = 0 \quad ; \quad x = \frac{x_0^2 + 4}{2x_0} \quad (7.23)$$

La lunghezza del segmento OA è l'ascissa del punto A ; invece la lunghezza del segmento OB è l'ordinata del punto B . Di conseguenza l'area del triangolo cercato vale:

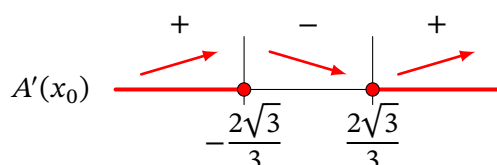
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{1}{2} \frac{x_0^2 + 4}{2x_0} (x_0^2 + 4) = \frac{(x_0^2 + 4)^2}{4x_0} \quad (7.24)$$

L'area trovata è funzione della sola variabile x_0 . Per trovare il valore che rende minima l'area studiamo la funzione ottenuta facendo la derivata prima e studiandone il segno.

$$A' = \frac{2(x_0^2 + 4) \cdot 2x_0 \cdot 4x_0 - (x_0^2 + 4)^2 \cdot 4}{16x_0^2} = \frac{(x_0^2 + 4)(4x_0^2 - x_0 - 4)}{4x_0^2} = \frac{(x_0^2 + 4)(3x_0^2 - 4)}{4x_0^2} \quad (7.25)$$

La derivata è formata da tre fattori, di cui due $((x_0^2 + 4)$ e $4x_0^2)$ positivi per qualsiasi valore di x_0 . Ci concentriamo sul terzo fattore.

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 4 &\geq 0 \\ 3x_0^2 - 4 = 0 &\quad ; \quad x_0^2 = \frac{4}{3} \quad ; \quad x_0 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_0 &\leq -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x_0 \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \quad (7.26)$$



Lo studio del segno e l'andamento della derivata ci dicono che il punto di minimo si ha per $x = 2\sqrt{3}/3$. Questo punto è compatibile con la richiesta che la tangente e il triangolo da essa formato stiano nel primo quadrante.

Infine, il punto di tangenza che rende minima l'area ha coordinate:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y_0 &= x_0^2 - 2x_0^2 + 4 = -x_0^2 + 4 = -\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{-4 + 12}{3} = \frac{8}{3} \\ T &\equiv \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{8}{3}\right) \end{aligned} \quad (7.27)$$

ESAME 17 Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

Nella figura proposta dal problema chiamiamo x la misura della base e y la misura dell'altezza del rettangolo. Di conseguenza $x/2$ sarà la misura del raggio della semicirconferenza. Il perimetro P della figura vale 2.

$$P = x + 2y + \pi \frac{x}{2} \quad (7.28)$$

L'area, intesa come la somma dell'area di un rettangolo e di un semicerchio, vale:

$$A = xy + \frac{\pi r^2}{2} = xy + \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \quad (7.29)$$

Abbiamo un'espressione che dipende da due variabili, x e y : per studiarne il massimo esprimiamo y in funzione di x nell'espressione del perimetro e sostituiamo l'espressione trovata in quella dell'area.

$$\begin{aligned} P &= x + 2y + \frac{\pi}{2}x \\ 2y &= P - x - \frac{\pi}{2}x \\ y &= \frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$A = x \left(\frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) + \frac{\pi}{8}x^2 = x \frac{P}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 = x \frac{P}{2} + x^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \quad (7.31)$$

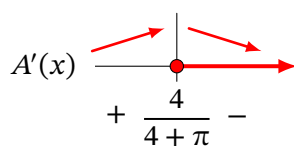
Abbiamo una funzione polinomiale (una parabola) il cui dominio è $x > 0$ (altrimenti l'area non avrebbe senso) ed è continua e derivabile dappertutto. Per trovarne il massimo possiamo cercare il vertice della parabola oppure studiare il segno della derivata. Procediamo per quest'ultima via.

$$A' = \frac{P}{2} + 2x \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{P}{2} + x \left(-1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad (7.32)$$

$$A' \geq 0$$

$$\frac{P}{2} + x \left(-1 - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \quad (7.33)$$

$$x \leq \frac{\frac{P}{2}}{1 + \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{4 + \pi}{4}} = \frac{4}{4 + \pi}$$



Secondo l'andamento del segno della derivata la funzione area ha un massimo per $x = 4/(4 + \pi)$, in corrispondenza del quale:

$$y = \frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4 + \pi} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{4 + \pi} = \frac{4 + \pi - 2 - \pi}{4 + \pi} = \frac{2}{4 + \pi} \quad (7.34)$$

Per cui le lunghezze dei lati sono:

$$x = \frac{4}{4 + \pi} \text{ m} \quad ; \quad y = \frac{2}{4 + \pi} \text{ m} \quad (7.35)$$

8

Studio dei flessi

Un **punto di flesso** è un punto in cui varia la concavità della curva

Per studiare i flessi di una funzione $f(x)$ in un intervallo I nel quale la funzione sia ovunque derivabile :

1. Studiamo il segno della derivata nell'intorno di ogni punto stazionari x_0 .
Se il segno della derivata prima è lo stesso prima e dopo il punto, quello è un punto di flesso orizzontale.
2. Studiamo il segno della derivata seconda.
I punti in cui la derivata seconda cambia di segno sono punti di flesso.

Parte III

Temi d'esame

1 Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2,$$

determinare il minimo di f .

Soluzione

Sessione ordinaria 2015, quesito n°6.

2 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del problema assicura l'esistenza.

Soluzione

Sessione ordinaria 2015, quesito n°9.

3 Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$, trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

Soluzione

Sessione suppletiva 2015, quesito n°2.

4 Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco \widehat{BC} . Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.

Soluzione

Sessione suppletiva 2015, quesito n°6.

5 Provare che la funzione $y = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - \arctan x$ non ne ha alcuno.

Soluzione

Sessione suppletiva 2015, quesito n°8.

6 Calcolare la derivata $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.

Soluzione

Sessione suppletiva 2015, quesito n°9.

7 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo.
Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

Soluzione

Sessione straordinaria 2015, quesito n°5.

8 Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

Soluzione

Sessione straordinaria 2015, quesito n°8.

9 Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

Sessione straordinaria 2015, quesito n°10.

10 Data una parabola di equazione:

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

Si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x , nel segmento parabolico delimitato dall'asse x . Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

Sessione ordinaria 2016, quesito n°2.

11 Data la funzione così definita in \mathbb{R} :

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^3-1|}$$

determinare minimi, massimi ed eventuali asintoti.

Sessione suppletiva 2016, quesito n°2.

12 Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0,1 \text{ m}^3$ e sta diminuendo alla velocità di $1200 \text{ cm}^3/\text{sec}$.

Soluzione

Sessione suppletiva 2016, quesito n°3.

13 Determinare il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.

Soluzione

Sessione straordinaria 2016, quesito n°3.

14 In un semicerchio di raggio $r = 10$ è inscritto un triangolo in modo che due vertici si trovino sulla semicirconferenza e il terzo vertice si trovi nel centro del cerchio. Qual è l'area massima che può assumere tale triangolo?

Soluzione

Sessione straordinaria 2016, quesito n°6.

15 Dimostrare che l'equazione

$$\arctan(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale

Soluzione

Sessione ordinaria 2017, quesito n°9.

16 Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto nell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Soluzione

Sessione ordinaria 2017, quesito n°10.

17 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.

Soluzione

Sessione straordinaria 2017, quesito n°1.

18 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & \text{per } x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

Determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

Soluzione

Sessione straordinaria 2017, quesito n°2.

19 Stabilire per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k ?

Soluzione

Sessione straordinaria 2017, quesito n°5.

20 Data la funzione:

$$f(x) = \ln(x) - [\ln(x)]^2$$

dimostrare che esistono due rette r e s tangenti al grafico della funzione in punti di ascissa $x > 1$, che passano entrambe per il punto $P(0; 1)$ e scrivere le rispettive equazioni.

Soluzione

Sessione straordinaria 2017, quesito n°7.

21 Rappresentare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left| \frac{3-2x}{x-3} \right| \quad (9.1)$$

Verificare se negli intervalli $[0; 2]$ e $[4; 6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a; b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

Soluzione

Sessione suppletiva 2017, quesito n°4.

22 Sia $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Determinare $f^{(2007)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

Soluzione

Sessione suppletiva 2017, quesito n°5.

23 Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Soluzione

Sessione ordinaria 2018, quesito n°3.

24 Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

Soluzione

Sessione ordinaria 2018, quesito n°5.

25 Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(0,\pi)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4 \sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB .

Soluzione

Sessione suppletiva 2018, quesito n°1.

26 Data la funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.

Soluzione

Sessione suppletiva 2018, quesito n°6.

27 Considerando la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x, & \text{per } x < 4 \\ e^{4-x} + 3, & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

Soluzione

Sessione straordinaria 2018, quesito n°3.

28 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot \sin(x)$, adoperando la definizione di derivata.

Soluzione

Sessione suppletiva 2018, quesito n°4.

29 Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

nel suo punto di flesso.

Soluzione

Sessione suppletiva 2018, quesito n°6.

30 Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$

definita in \mathbb{R} e a valori in \mathbb{R} , mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a . Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3 .

Soluzione

Sessione suppletiva 2018, quesito n°9.

31 Dimostrare che la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{ax}$$

è la funzione

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

Soluzione

Sessione suppletiva 2018, quesito n°10.

32 Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f .

Soluzione

Sessione ordinaria 2019, quesito n°1.

33 Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S , determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

Soluzione

Sessione ordinaria 2019, quesito n°3.

Indice analitico

Derivabilità e continuità, 11
derivabilità, criterio, 11
derivata destra, 11
derivata sinistra, 11
derivata, definizione, 5

punti di non derivabilità, 12

studio della derivabilità di una funzione, 12